

Csepcsényi Lajos Lászlóné Balogh Melinda

# Statikai alapfogalmak, és az építményeket érő erőhatások

**NSZFI**  
NEMZETI SZAKKÉPZÉSI  
ÉS FELNŐTTKÉPZÉSI INTÉZET

A követelménymodul megnevezése:  
**Építőipari kivitelezés tervezése**

A követelménymodul száma: 0688-06 A tartalomlelem azonosító száma és célcsoportja: SzT-003-50

# A STATIKAI ALAPFOGALMAK, ÉS AZ ÉPÍTMÉNYEKET ÉRŐ ERŐHATÁSOK

## ESETFELVETÉS – MUNKAHELYZET

Az épületek tervezése és kivitelezése emberi szükségletet elégít ki. Ez a szükséglet az olyan terek kialakítása iránti igény, amely védelmet nyújt a természeti hatások ellen, esztétikus és a belső terek kialakításában is megfelel az épület funkciójának.

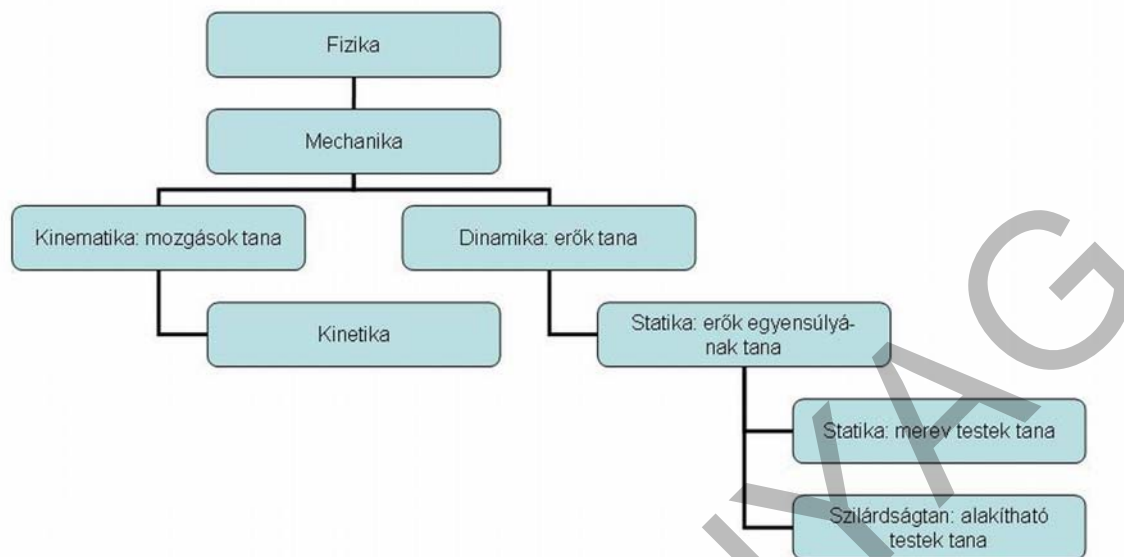
Az épületekkel szembeni legalapvetőbb követelmény, hogy az épületre ható erők állandóan egyensúlyban legyenek, valamint az épület és annak részei ne mozduljanak el, ne károsodjanak – a rájuk ható erőhatásokat biztonsággal viseljék – ezáltal biztosítva a biztonságos használatot és az épület hosszú fennmaradását. Emellett olyan szerkezeteket kell tervezni, amelyek nemcsak képesek az erőfelvételre, de azok kialakítása gazdaságos is. Az épületre ható erők egyensúlyával, illetve az épületre ható erők meghatározásával a statika foglalkozik. A statika témakörét az alábbi probléma felvetésével lehet szemléltetni:

Ön munkahelyi technikusként építési helyszínen dolgozik. Feladata, hogy a helyszínen felmerülő, azonnali döntést igénylő statikai kérdésekben döntsön. Ilyen probléma lehet például a zsaluzat megfelelő állékonysága, az ideiglenes alátámasztó szerkezetek megfelelősége. Az ilyen szerkezetekre ható erőket összegezze, egyensúlyozza, valamint méretezze a szerkezeti elemeket, amelyek a rá ható erőket viselni képesek, az erőket át tudják adni más szerkezeti elemeknek.

A feladat megoldásához először meg kell határoznunk az erő és a hozzá kapcsolódó hatások fogalmát, tulajdonságait, valamint az erők hatásvonalát, eredőjét.

## SZAKMAI INFORMÁCIÓTARTALOM

A statika a fizika tudományterületei közé tartozik, melynek helyét a következő ábra mutatja be.



1. ábra. A statika helye a fizika tudományán belül

## 1. Az erő és jellemzői

Az erő nem más, mint az a hatás, amely a test mozgásállapotát irány vagy nagyság szerint megváltoztatja.

Az erő jellemzésére meg kell adnunk az erő nagyságát, melynek mértékegysége Newton (N) vagy Kilonewton (KN), az erő hatásvonalát, amely az erő támadáspontján áthaladó egyenes, és az erő irányát. Az erő irányát egyetlen szöggel is meg lehet adni úgy, hogy egy koordináta-rendszer valamely tengellyel bezárt szögét adjuk meg.

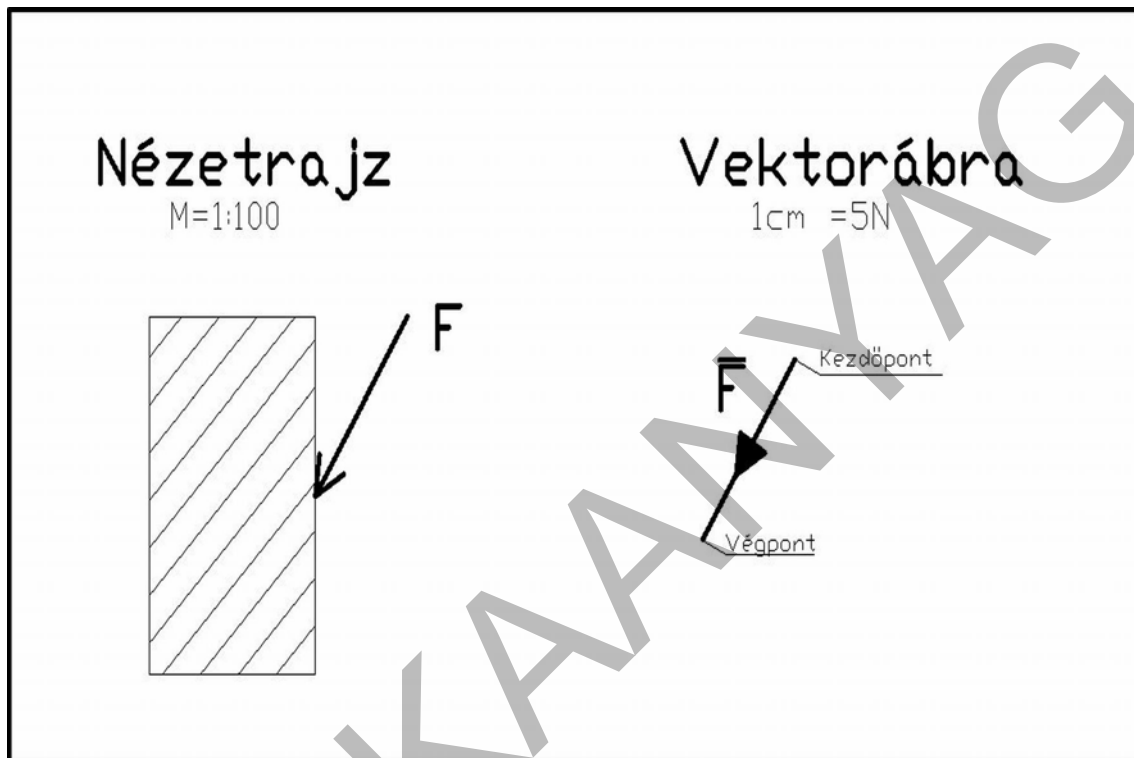
1N az az erő, amely 1 kg tömegű testnek  $1 \text{ m/s}^2$  nagyságú gyorsulást ad.

Az erő a természetben sok alakban előfordulhat:

1. Koncentrált erők: a test tömegének vagy felületének viszonylag kis részére hatnak, ezeket latin nagybetűvel jelöljük.
2. Vonal mentén megoszló erők – jelölésük latin kisbetűvel történik.

3. Felületen megoszló erők (szélteher, talajvíznyomás)
4. Térben megoszló erők

A statikai elemzéshez az erőket modellezni kell. Ehhez a testre ható erőket valamilyen módszerrel ábrázolni kell. Az erő három jellemzőjét nézetábrán vagy vektorábrán szemléltethetjük, melyeket a következő ábra mutat be.



2. ábra. Az erő ábrázolása

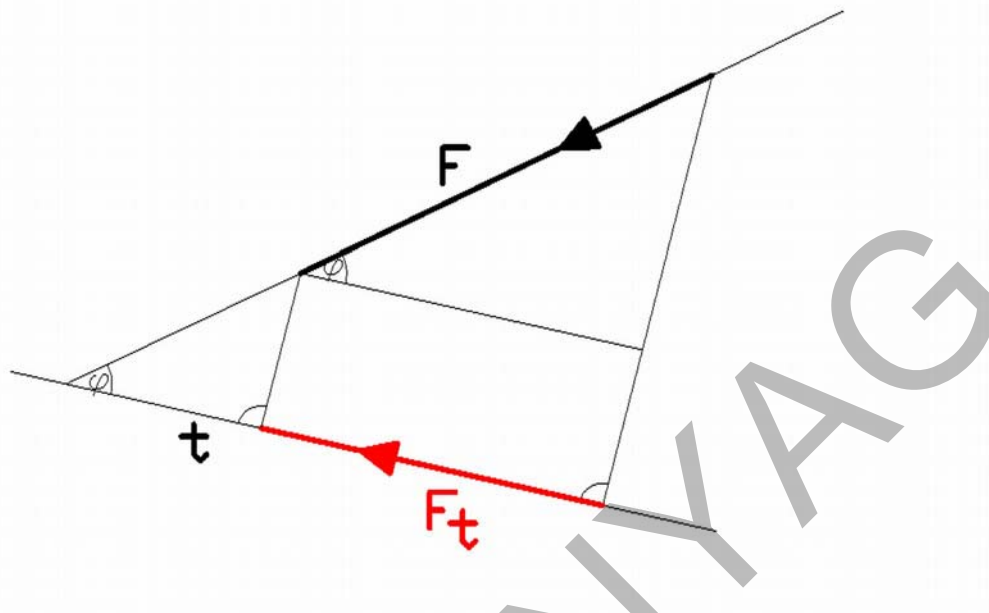
A nézetrajz a szerkezet vagy test méretarányos rajzát tartalmazza, melyen az erő támadáspontját és a hatásvonalát adjuk meg. Az erő irányát a hatásvonalra rajzolt nyílhegygel jelöljük. Az erő mellé azonosításként melléírjuk a betűjelét és a nagyságát. A vektorábrán ezzel szemben az erő nagyságát és irányát erővektorként ábrázoljuk. Az erő vektorát egy tetszőleges pontból, a vektor kezdőpontjából, az erő hatásvonalával párhuzamos egyenes vonaldarabbal ábrázoljuk, melynek hossza az erő nagyságával arányos, az erő irányát pedig nyílhegy jelzi.

## 2. Az erő vetülete

Egy síkban működő  $F$  erő  $t$  tengelyre vonatkoztatott irányított vetületét úgy kapjuk meg, hogy az  $F$  erő kezdő és végpontját a  $t$  tengelyre merőleges vetítő vonalakkal a  $t$  tengelyre vetítjük. Ekkor egy  $F_t$  vektort kapunk. Ekkor a  $F$  erő  $t$  tengely irányú vetülete:

$$F_t = F \cdot \cos \varphi$$

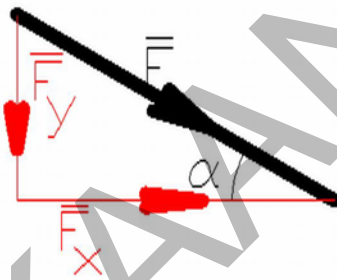
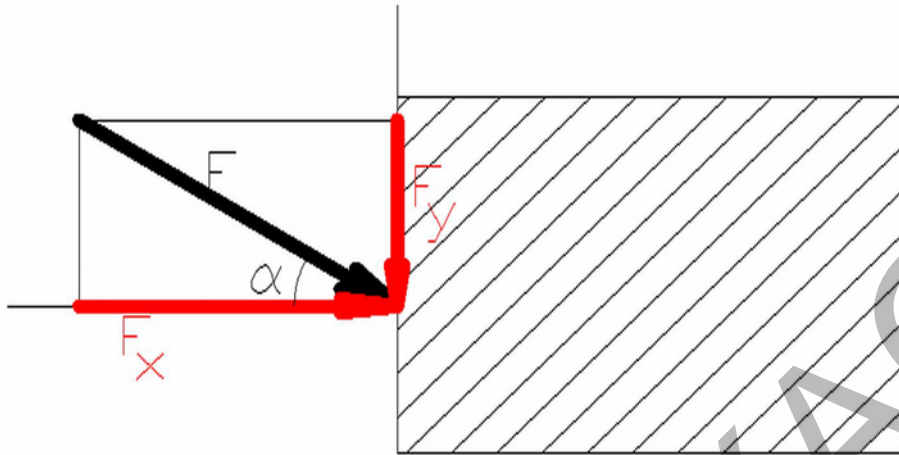




3. ábra. Az erő vetülete

Ha a  $t$  tengely az erő hatásvonalával párhuzamos, akkor a vetület vektor megegyezik az erő vektorával, ha a  $t$  tengely merőleges az erő hatásvonalára, akkor a vetületvektor nagysága 0.

A gyakorlatban sokszor előfordul, hogy az erőket két, egymásra merőleges összetevőre kell felbontani (ezek leggyakrabban vízszintes és függőleges összetevők). A feladatot megoldhatjuk szerkesztéssel, ekkor a felbontandó erő kezdő és végpontjából vízszintest és függőlegest rajzolva megrajzoljuk a vektorháromszöget. Ha a rajzot erőléptékben készítettük el, akkor a két összetevő nagysága a rajzról lemérhető. Ezt a megoldást azonban befolyásolja az alkalmazott erőlépték és a mérés pontossága.



4. ábra. Az erő felbontása vízszintes és függőleges összetevőkre

Ennél sokkal pontosabb megoldás, ha az erő összetevőit számítással határozzuk meg. Ekkor az alábbi képleteket kell alkalmaznunk:

$$F_x = F \cdot \cos \alpha$$

$$F_y = F \cdot \sin \alpha$$

Ellenőrzés:

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2$$

A statikai feladatokban gyakran találkozunk olyan erőkkel, amelyeknek hajlásszöge nem adott. Ekkor választhatjuk azt a megoldást, hogy a hajlásszöget más adatokra támaszkodva kiszámítjuk, de ez célszerűtlen, mert a vetületek más módszerrel is számíthatók. A vetületek számításához a geometriában megtanult hasonló háromszögekre igaz aránypárok felírását használjuk fel. A feladatoknál az ábrákon minden esetben kijelölhetünk egy olyan geometriai háromszöget, amelyet minden adatával ismerünk, vagy ismertté tehetünk. Ez a geometriai háromszög minden esetben hasonló az erőfelbontással nyert vektorháromszöghöz, s ebből a keresett erővetületek meghatározhatók. A háromszög megkeresése után annak két adatából a harmadik számítható.

### 3. Az erő nyomatéka

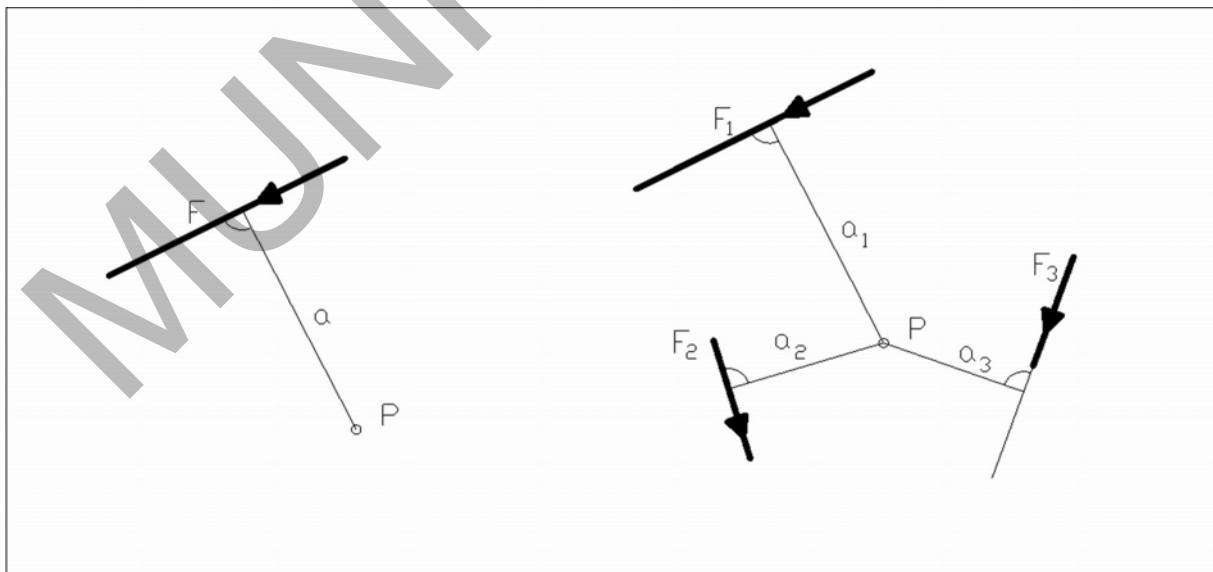
Síkban működő  $F$  erő ugyanezen síkban lévő  $P$  pontra képzett forgatónyomatékát úgy határozhatjuk meg, ha az  $F$  erő hatásvonalának a  $P$  ponttól mért merőleges távolságát – az erő karját ( $a$ ) – megszorozzuk az erő nagyságával.

Az erő nyomatéka mindig előjeles mennyiség, pozitív, ha az óramutató járásának megfelelő irányban forog az erő, ha azzal ellentétesen, akkor a nyomaték negatív előjelű. A nyomaték jele  $M$ , mértékegysége  $KNm$  vagy  $Nm$ . Ha a forgatás középpontja rajta van az erő hatásvonalán, akkor az erő arra a pontra képzett nyomatéka  $0$ . Akkor is  $0$  a nyomaték, ha az erő nagysága  $0$ .

$$M_P = F \cdot a$$

Több erő ugyanarra a pontra vonatkoztatott nyomatéka:

$$M_P = F_1 \cdot a_1 + F_2 \cdot a_2 + F_3 \cdot a_3 = \sum F_i \cdot a_i$$

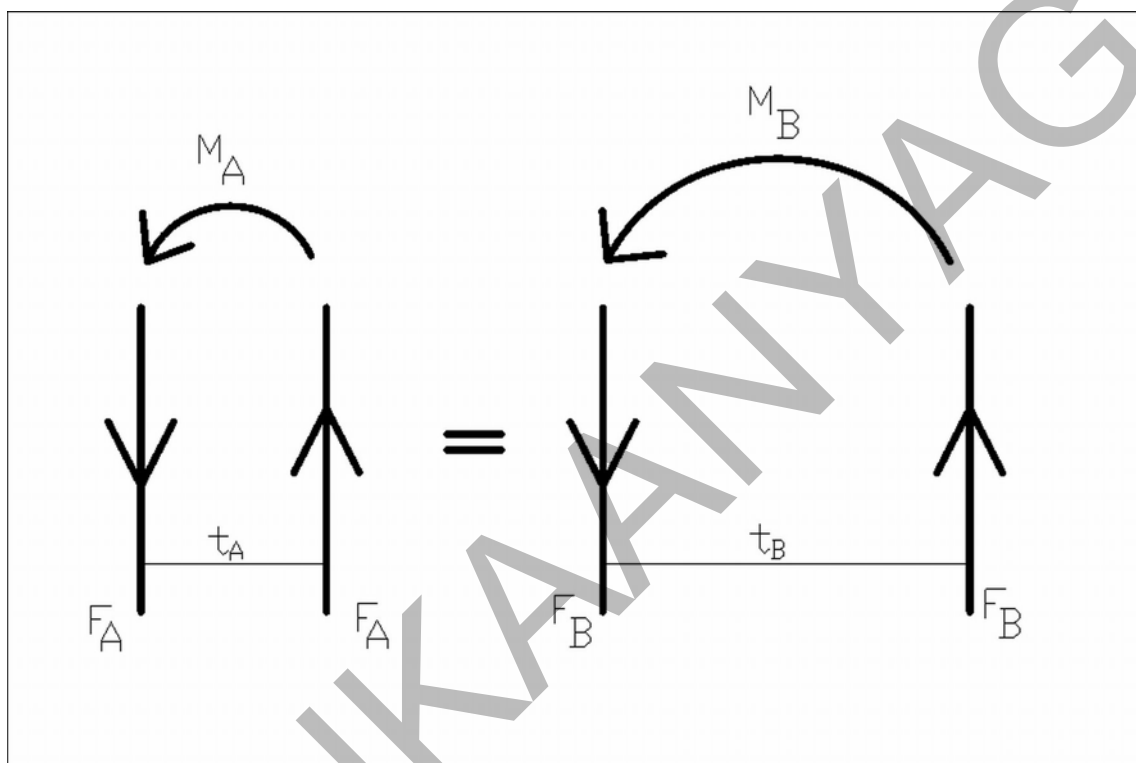


5. ábra. Az erő nyomatéka és összegzése adott pontra

Két párhuzamos hatásvonalon működő, azonos nagyságú, de ellentétes irányú erőt erőpárnak nevezünk. Az ellentétes erők összege nulla nagyságú, de van hatása: nyomaték, amely a sík bármely pontjaira felírva azonos.

$M = F \cdot t$ , ahol a  $t$  az erőpárt alkotó erők közötti távolság.

A forgatónyomaték helyettesíthető a saját síkjában olyan erőpárral, amelynek nyomatéka nagyságra és előjelre nézve az eredeti erőpárral azonos.



6. ábra. Az erőpár és a nyomaték helyettesítése

Az erőt a hatásvonalon kívül eső pontra áthelyezve az adott erővel megegyező nagyságú erőt kell működtetnünk, de emellett figyelembe kell venni az eredeti hatásvonalon működő erő az adott pontra gyakorolt forgató hatását is – így egy erőt áthelyezve egy erőt és egy nyomatékot kapunk, ahol a nyomaték az erő és az erő elmozdításának mértéke – az eredeti és az új hely távolságának – a szorzata.

#### 4. A statika alaptételei

Azokat az alapvető törvényszerűségeket, amelyeket közvetlenül a tapasztalatainkból merítünk, igazságukat nem szükséges külön bizonyítani, más tételekre nem vezethetők vissza, tovább nem egyszerűsíthetők és a belőlük levont következtetések a természet törvényeivel nem ellenkeznek, alaptételeknek vagy idegen szóval axiómáknak nevezzük. A statikának négy ilyen alaptétele van:



1. Merev testre ható két erő akkor és csak akkor van egyensúlyban, ha a két erő hatásvonala közös, nagysága azonos, iránya ellentétes.
2. Három, különböző hatásvonalon működő erő akkor és csak akkor lehet egyensúlyban, ha hatásvonalaik közös pontban metszik egymást és az erők vektoraiból zárt, nyílfolytonos háromszög szerkeszthető.
3. A harmadik alaptételt Pierre Varignon 1685-ben állította fel. Merev testre működő erőrendszer hatása nem változik, ha az adott erőrendszerhez egyensúlyban levő erőket adunk hozzá, vagy az erőrendszerből ilyeneket eltávolítunk. Ebből következik, hogy a merev testre ható erők saját hatásvonalukon bárhova elcsúsztathatók – a támadáspont a hatásvonalon bárhol felvehető.
4. A negyedik alaptételt Isaac Newton állította fel 1687-ben. Minden erőhatás (akció) ellenhatást (reakciót) vált ki, s e párosával jelentkező két ellentétes erőhatás közös hatásvonalon működik és egymással egyenlő.

## 5. Síkbeli erőrendszerek

Két vagy több erő együttesét erőrendszernek nevezzük. Ha a testre ható erők közös síkban működnek, akkor síkbeli erőrendszerről beszélünk, ha viszont az erőrendszer erőinek hatásvonalaira nem lehet közös síkot fektetni, akkor térbeli erőrendszerrel állunk szemben. Sok esetben a könnyebb kezelhetőség miatt a térbeli erőrendszert egy síkbeli erőrendszerrel helyettesítjük, modellezzük.

Azt az erőt, amely az erőrendszer erőit minden hatásukban helyettesíti eredőerőnek vagy más néven rezultánsnak nevezzük és  $R$  betűvel jelöljük. A helyettesített erők az eredőerő komponensei vagy alkotói, a helyettesítés műveletét pedig erőösszetételnek nevezzük. Az erőösszetétel ellentétes feladata, amikor az eredőerőt komponenseire bontjuk az erőfelbontás művelete.

Ha a test a rá működő erők hatására nyugalomban marad, akkor a testre ható erők rendszere egyensúlyban lévő erőrendszert alkot.

A síkbeli erőrendszer eredőjét számítással és szerkesztési módszerekkel is meghatározhatjuk.

Az eredőerő számításához első lépésben meg kell határoznunk az síkbeli erőrendszert alkotó erők vízszintes és függőleges összetevőit. Ezt a 2. alfejezetben ismertetett módszerekkel tehetjük meg. Fontos, hogy az erők és összetevőiket megfelelően azonosítsuk, ezért az erők  $F$  jele mellé alsó indexben adjunk az erőknek sorszámot, a vetületeik jelölését pedig  $x$ , és  $y$  indexekkel lássuk el.

Az eredőerő számításához fel kell használnunk a vetületi tételeket, amelyek a következők:

1. Az eredőerő vízszintes vetülete egyenlő az összetevők vízszintes vetületeinek algebrai (előjelhelyes) összegével.

$$R_x = \sum F_{ix}$$

2. Az eredőerő függőleges vetülete egyenlő az összetevő erők függőleges vetületeinek algebrai (előjelhelyes) összegével.

$$R_y = \sum F_{iy}$$

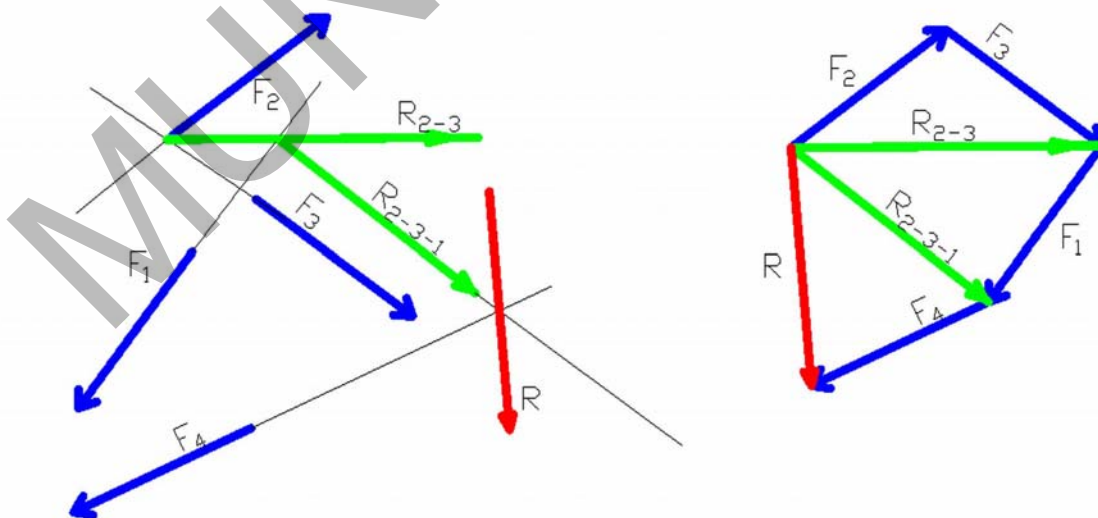
Az  $R_x$  és  $R_y$  értékek előjeles mennyiséget. Ha azokat egy koordináta-rendszerben helyezzük el, és az eredőerő összetevők pozitív előjelűek, akkor irányuk megegyezik a koordináta-rendszer tengelyeinek irányával, ha az összetevők negatív előjelűek, akkor az összetevők iránya ellentétes a koordináta-tengelyek irányítottságával. Az eredőerő nagyságát az összetevőkre alkalmazott Pitagorasz tétellel meghatározhatjuk. A koordináta-tengelyekkel bezárt hajlásszöget pedig a tangens szögfüggvények felírásával határozhatjuk meg. Figyelni kell arra, hogy az eredőerő irányítottsága olyan legyen, hogy az az összetevőivel nyílfolytonos háromszöget alkosson. Ezzel megállapítottuk a síkbeli erőrendszert helyettesítő erő nagyságát, de feladatunk még annak a helyének a meghatározása is. Ehhez szükség van a nyomatéki tétel megismerésére:

3. Az eredőerő nyomatéka a sík valamely pontjára egyenlő az összetevők ugyanezen pontra felírt nyomatékainak előjelhelyes összegével.

A tétel segítségével az eredő hatásvonalának egy pontjának koordinátáinak meghatározása lehetséges. A nyomatéki tételt a sík bármely pontjára felírva, az eredő vetületeiből való meghatározása után, már csak az eredő erő karja az ismeretlen az egyenletben, amely az egyenlet megoldásával meghatározható. Az erőkar meghatározásával megkapjuk az eredőerő hatásvonalának távolságát a nyomatéki ponttól. A távolság meghatározása azonban még nem ad teljes megoldást, még meg kell állapítanunk az egyenletből kapott kar irányát is. Jelenleg csak azt tudjuk, hogy az eredő egy pontja rajta van a nyomatéki pont körül a karral, mint a sugárral rajzolt kör kerületén. Ennek a körnek az eredőerő az érintője lesz (a kar a nyomatéki pont és az eredőerő közötti merőleges távolság), de ezzel a feltétellel a kör két pontja jöhet számításba. A tényleges és keresett pont az lesz, amelyen áthaladva az eredőerő forgatónyomatéka a nyomatéki pontot tekintve azonos lesz az erőrendszer ugyanarra a pontra felírt nyomatékával.

Az előbb ismertetett megoldás igen számításigényes, ezért célszerűbb, hogyha az eredő erő valamilyen kijelölt egyenessel való metszéspontját keressük meg. Az a kijelölt egyenes legtöbbször valamilyik koordináta-tengely. A feladat megoldásának első lépéseként az eredő erőt a metszéspontban bontsuk fel komponenseire és a nyomatékát is ebben a formában fogjuk felírni, a nyomatéki egyenletben a vízszintes kar  $X_R$ , a függőleges kar pedig  $Y_R$  lesz. Ekkor célszerű a nyomatéki pontnak az origót választani, mert ekkor a karok közül az egyik zérus lesz, ezzel az origóra felírt nyomatéki egyenlet is leegyszerűsödik, az egyenlet pedig egyetlen ismeretlent fog tartalmazni. Az ismeretlen meghatározásával az eredő erő tengelymetszéspontjának távolságát határoztuk meg a koordináta-rendszer kezdőpontjához viszonyítva. A feladatnak csak akkor lesz egyértelmű megoldása, ha azt is megállapítjuk, hogy az eredő erő koordináta-tengellyel való metszéspontja az origó melyik oldalán helyezkedik el. Ennek megállapítása nagyon egyszerű, meg kell vizsgálnunk, hogy az eredő erő mely oldalról fejt ki az erőrendszerrel megegyező forgató hatást. A vizsgálathoz hipotézist állítunk fel, vagyis feltételezzük, hogy a keresett pont az origó mely oldalára esik, és arra felírjuk a nyomatéki egyenletet. Ha azonos megoldást kapunk, mint az erőrendszer által kifejtett forgatás, akkor a hipotézis helyes volt, ha ellenkező előjelet kapunk, akkor a tényleges metszéspont az origó másik oldalára fog esni.

Az eredő erő nagyságát és irányát meghatározhatjuk szerkesztéssel is. Ennek feltétele, hogy a szerkesztéshez vektorábrát használjuk, és előre állapítsuk meg, hogy a rajzon 1 cm mekkora nagyságú erőnek fog megfelelni. A szerkesztésnek kétféle módszere van. Az eredő meghatározása közvetlen erőösszetétellel módszer akkor alkalmazható, ha az eredő összetevőinek hatásvonalai a végesben metszik egymást. Az módszer a végesben metsződő hatásvonalú két erő nyílfolytonos ábrázolásának sorozatos megismétléséből áll, melyet a következő ábra szemléltet.



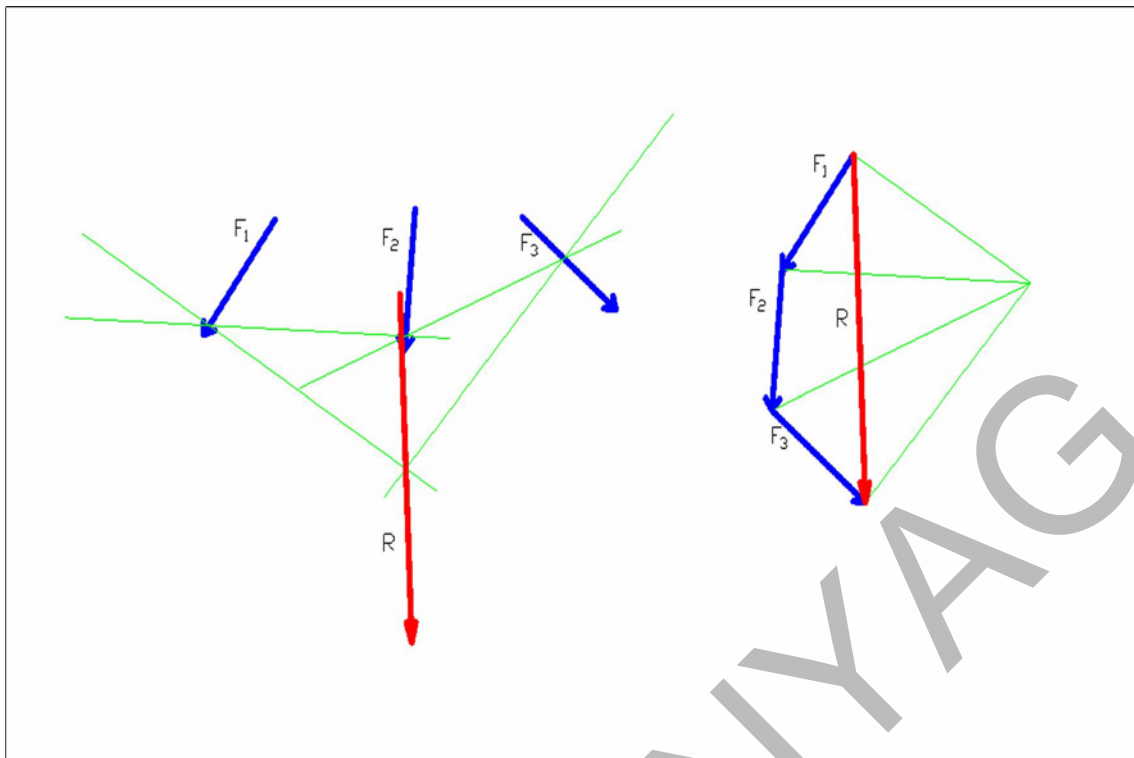
7. ábra. Az eredő meghatározása közvetlen erőösszetétellel

A 7. ábra bal oldalán egy síkbeli erőrendszer látható, kék vektorokkal és azok hatásvonalával ábrázolva. Ennek az erőrendszernek keressük az eredőjét szerkesztéssel. A szerkesztés elve az, hogy egyszerre csak mindig két erő eredőjét határozzuk meg. Első lépésként tekintsük az  $F_2$  és  $F_3$  erőket, és határozzuk meg az eredőjüket. Ehhez felszerkesztjük a két erő nyílfolytonos ábráját, mely a 7. ábra jobb oldalán látható, így a két erő eredőjéhez, az  $R_{2-3}$  eredőhöz jutunk, amelyet zöld színnel jelöltünk. A következő lépésben ennek az  $R_{2-3}$  eredőnek és az  $F_1$  erőnek az eredőjét keressük, ezért az  $R_{2-3}$  eredő végpontjához illesztjük az  $F_1$  erő kezdőpontját. Így az  $R_{2-3-1}$  csoporteredőt kapjuk meg. Az  $F_4$  erővel ugyanígy eljárva megkapjuk a teljes síkbeli erőrendszer eredőjét, ami az ábrán piros színnel látható.

A bemutatott szerkesztési lépésekből látható, hogy az eredő vektorát úgy kapjuk meg, hogy a folyamatos nyíllal egymás után illesztett erővektorokból álló tört-vonal az ún. erősokszög – más néven vektorpoligon – kezdőpontjából e törtvonal végpontjába irányulóan (nyíllüktetéssel) vektort rajzolunk. Ha a szerkesztés előtt meghatároztuk, hogy a rajzunkon 1 egység mekkora erőnek felel meg, akkor az eredő nagysága lemérhető, bár ez a módszer a korábbi alfejezetekben említett okok miatt pontatlanabb, mint a számítási módszer, de jó tájékoztatást ad az eredő irányáról és nagyságáról.

Ugyanarra az erőrendszerre többféle erősokszöget rajzolhatunk aszerint, hogy a vektorokat milyen sorrendbe rajzoljuk egymás után, azonban az eredő jellemzői függetlenek a vektorok felrajzolási sorrendjétől.

A közvetlen erőösszetétel módszere azonban csak abban az esetben alkalmazható, ha a síkbeli erőrendszert alkotó erők hatásvonalainak metszéspontja a rajzlap területére esik. Ezzel szemben az eredő meghatározása a kötélsokszög szerkesztésével minden esetben alkalmazható, ezért a gyakorlatban ez terjedt el. Az eredő szerkesztésének elve a közvetlen erőösszetétel módszerére valamint a nyomatéki alaptételre alapul, a szerkesztéshez segédvektorokat veszünk fel, és az erők és a segédvektorok eredőit határozzuk meg hasonlóan a közvetlen erőösszetétel módszeréhez, valamint itt is egyszerre csak két erővel foglalkozunk. Az eredő nagyságát úgy kapjuk meg, hogy a folyamatos nyíllal egymás után illesztett erővektorokból álló erősokszög kezdő és végpontját egyenes vonallal kötjük össze. A két pont közötti távolság a választott erőléptékben az eredő nagyságát adja meg.



8. ábra. Kötélsokszög szerkesztése

A 8. ábra bal oldalán a síkbeli erőrendszer nézetrajza, jobb oldalán pedig a vektorábrája látható. Az erőket kék színnel jelöltük, a segédvektorokat zöld színnel. Az eredő hatásvonalának szerkesztéséhez először vegyünk fel a síkon egy tetszőleges póluspontot, amelyből majd az összetevők vektoraihoz segéderőket rajzolunk. Ezzel egyidőben a nézetrajzon egy önkényesen felvett helyen kezdve a segéderő vektorokkal párhuzamosokat szerkesztünk. Ezek a zöld színnel jelölt párhuzamosok a segéderők hatásvonalait szimbolizálják. A nézetábrát úgy kell elkészíteni, hogy a segéderők a vektorábrán általuk közrefogott összetevő határvonalán metsződjenek. Az első és utolsó segéderőt metszésbe hozzuk, és a metszéspontok keresztül párhuzamost szerkesztünk az eredőerő vektorával, amely az eredőerő hatásvonalára. Ezzel a módszerrel meghatároztuk az eredőerő nagyságát és az irányát. Az eredő meghatározása ennél a módszernél is független az összetevők egymás utáni felrajzolásának sorrendjétől, de célszerű az erőket balról jobbra haladva ábrázolni. A póluspontot is úgy célszerű megválasztani, hogy a segéderők és az erővektorok egymással jó metszést adjanak.

Egy síkbeli erőrendszer eredőerejének meghatározásakor fontos, hogy a feladat konkrét meghatározása előtt elemezzük az erőrendszert. Az erőrendszer tanulmányozása során találhatunk olyan speciális eseteket, amelyek jelentősen megkönnyíthetik és lerövidíthetik a számítást vagy a szerkesztést. Az egyszerűsítés ellenére a jegyzetben ismertetett összefüggések azonban ekkor is igazak.

Az egyik ilyen speciális eset a közös hatásvonalon működő erők esete. Ekkor a számításához az adott hatásvonalat kell felvenni koordináta-tengelyként és alkalmazzuk az erre a tengelyre képzett vetületek összegzési tétel elvét, vagyis az eredő hatása megegyezik az összetevő erők hatásának összegével. A szerkesztésnél az eredő erő vektora az erőléptékben felszerkesztett vektorokra kezdőpontjából a végpontjába irányuló vektor, a hatásvonala pedig megegyezik az összetevő erők közös hatásvonalával.

Ha az erők hatásvonalai egy pontban metszik egymást, akkor a feladat szerkesztéssel való megoldását vissza kell vezetni a közvetlen erőösszetétel módszerére, és egy vektorsokszöveget kell készítenünk az eredő vektorának meghatározásához. Ezzel meghatározhatjuk az eredő nagyságát és irányát. A hatásvonalak közös metszéspontjának esetében az eredőerő hatásvonala is a közös metszésponton megy át, mivel a vektorsokszög szerkesztésekor kapott csoporteredők hatásvonalai is a közös metszésponton haladnak át.

Egymással párhuzamos erők eredője esetében a szerkesztést a kötelsokszög módszerével hajtsuk végre. Az eredő erő nagysága az első erő kezdőpontjából az utolsó erő végpontjáig tart, iránya megegyezik az erőrendszer összetevőinek irányával, így a vektorábrában nyílütközést kapunk. Az eredőerő helyének szerkesztése szintén a kötelsokszög módszerénél megtanultakkal analóg módon történik. Számításkor az eredő erő nagyságát a vetület, helyét a nyomatéki tételekből határozzuk meg.

A síkbeli erőrendszer egyensúlyozásához a szükséges az erők összetevőkre bontása, valamint az eredőerő meghatározása. Ezek alapján írhatjuk fel a majd az egyensúlyi feltételeket, valamint az erőrendszer nyomatékát.

## TANULÁSIRÁNYÍTÓ

1. Tekintse át és értelmezze a statika alapfogalmait és alaptételeit!
2. Figyelje meg és elemezze a mindennapi életben lezajló erőhatásokat! Vizsgálja meg, hogy a megfigyelt jelenségekre milyen módon teljesülnek a statika alaptételei!
4. Tekintse át és értelmezze a síkbeli erőrendszerhez kapcsolódó fogalmakat és értelmezze az eredő erő fogalmát és tulajdonságait!
5. Keressen a mindennapi életből erőrendszereket és az azokat ellensúlyozó erőket!
6. Gondolja végig és vezesse le a nyomatéki tételből következő megállapítások helyességét!
7. Vezesse le, és rajzokkal támassza alá egy síkbeli erőrendszerre vonatkozóan, hogy az eredő szerkesztéssel való meghatározása miért független az erőrendszert alkotó erők felrajzolásának sorrendjétől!
8. Értelmezze és gyakorolja az eredőerő szerkesztési módszereit!



9. Értelmezze és gyakorolja az eredőerő számítással történő meghatározását!

MUNKANYELV

## ÖNELLENŐRZŐ FELADATOK

### 1. feladat

Ismertesse az alábbi alapfogalmakat: erő, erőpár, nyomaték, erő vetülete!

MUNKANYAG

---

---

---

---

---

---

---

---

### 2. feladat

Ismertesse a statika négy alaptételét!

MUNKANYAG

---

---

---

---

---

---

---

---

### 3. feladat

Írja fel erőpárok variációjaként az  $M=20 \text{ KNm}$  nyomatékértéket!

---

---

---

---

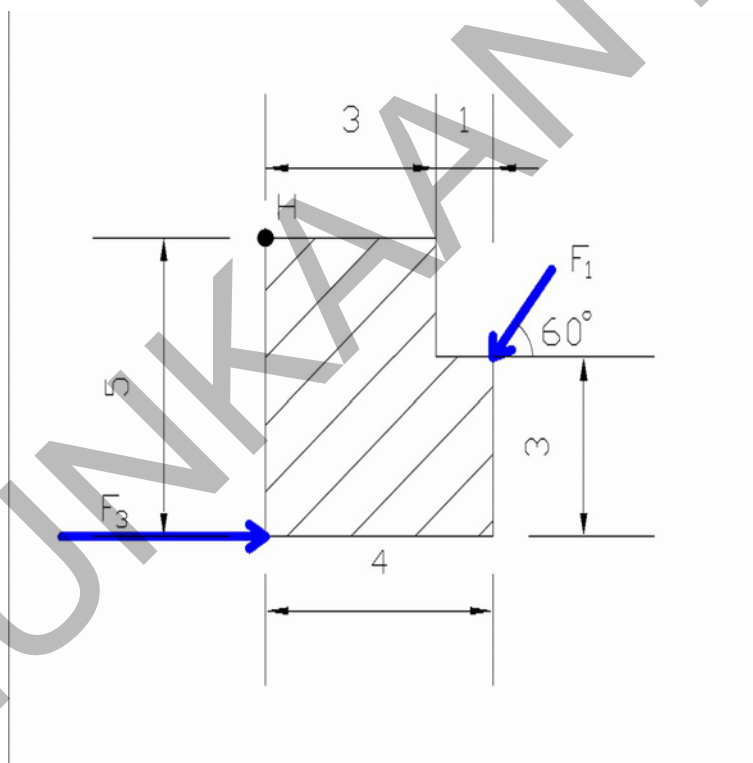
---

---

**4. feladat**

Milyen erőhatások érvényesülnek, ha a következő ábrán lévő erőket a H pontba helyezzük át?

$F_1=5 \text{ KN}$ ,  $F_3=10 \text{ KN}$



9. ábra. Számpélda erők áthelyezéséhez

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

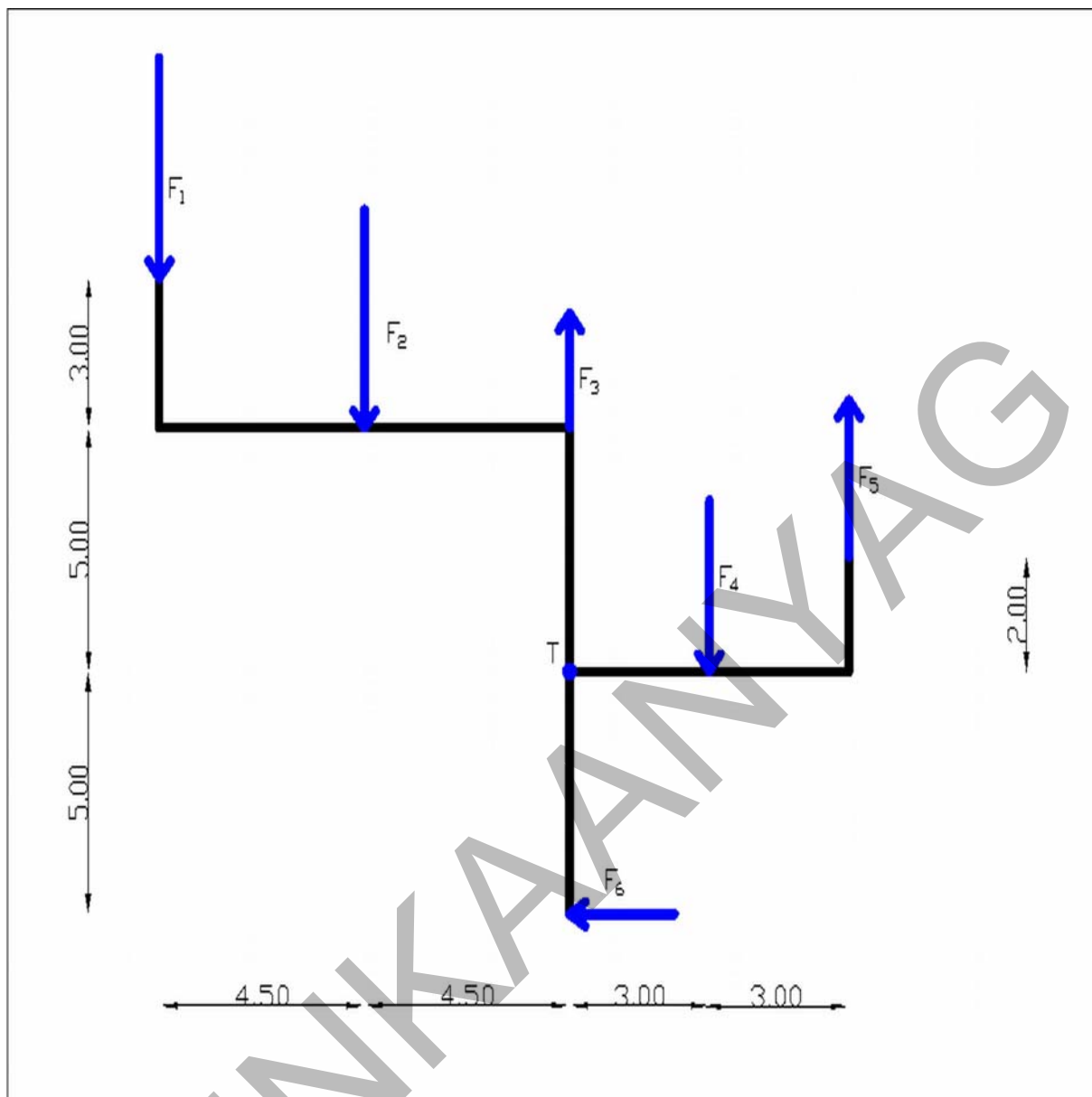
---

**5. feladat**

Határozza meg a testre ható síkbeli erők nyomatékát a síkban lévő T pontra vonatkozóan!

$F_1=20$  KN,  $F_2=10$  KN,  $F_3=5$  KN,  $F_4=10$  KN,  $F_5=10$  KN,  $F_6=5$  KN. A feladatban a távolságok méterben értendők.

MUNKADOLVAT

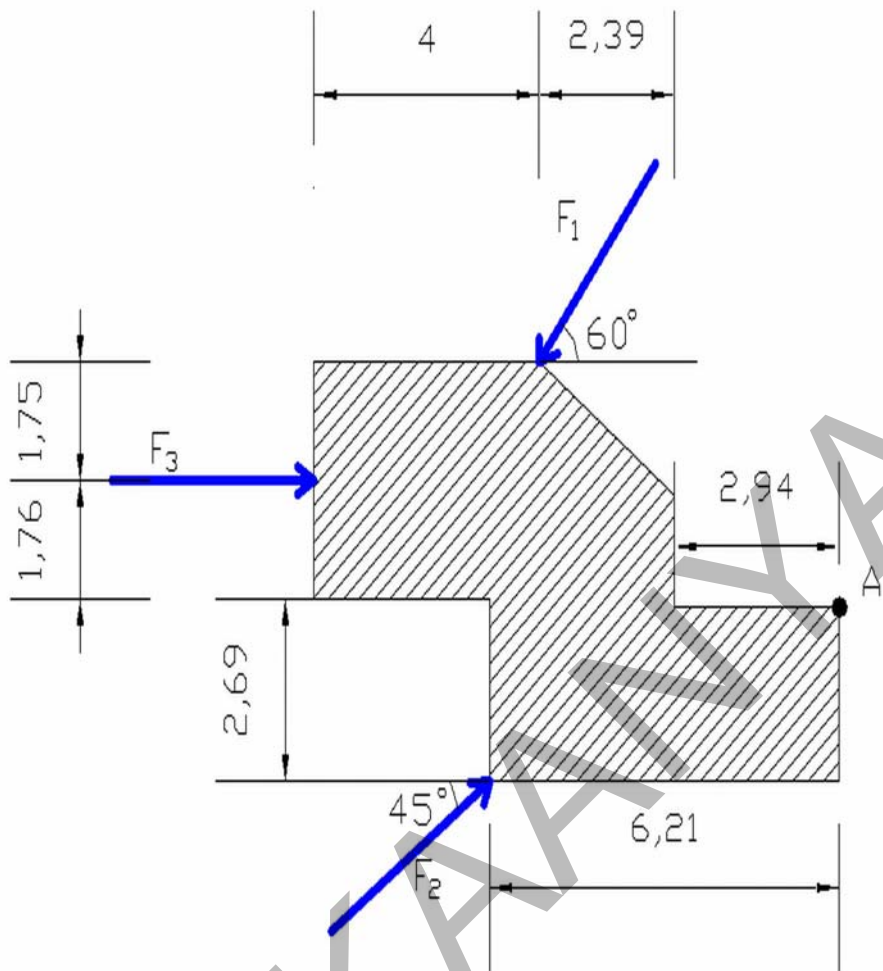


10. ábra. Számítási feladat

**6. feladat**

Határozza meg a síkbeli erőrendszer A pontra vonatkoztatott nyomatékát!

$$F_1 = 10 \text{ KN}, F_2 = 15 \text{ KN}, F_3 = 15 \text{ KN}$$



11. ábra. Számpélda nyomaték meghatározására

### 7. feladat

Ismertesse a vektorábrázolás módszerét! Ábrázolja vektorábrával a 4. feladat erőit, ha  $1\text{ cm} = 1\text{ KN}$ , illetve ha  $1\text{ cm} = 5\text{ KN}$ . A vektorábrázolás módszerével határozza meg a ferde erők vízszintes és függőleges összetevőit!





---



---



---



---



---



---

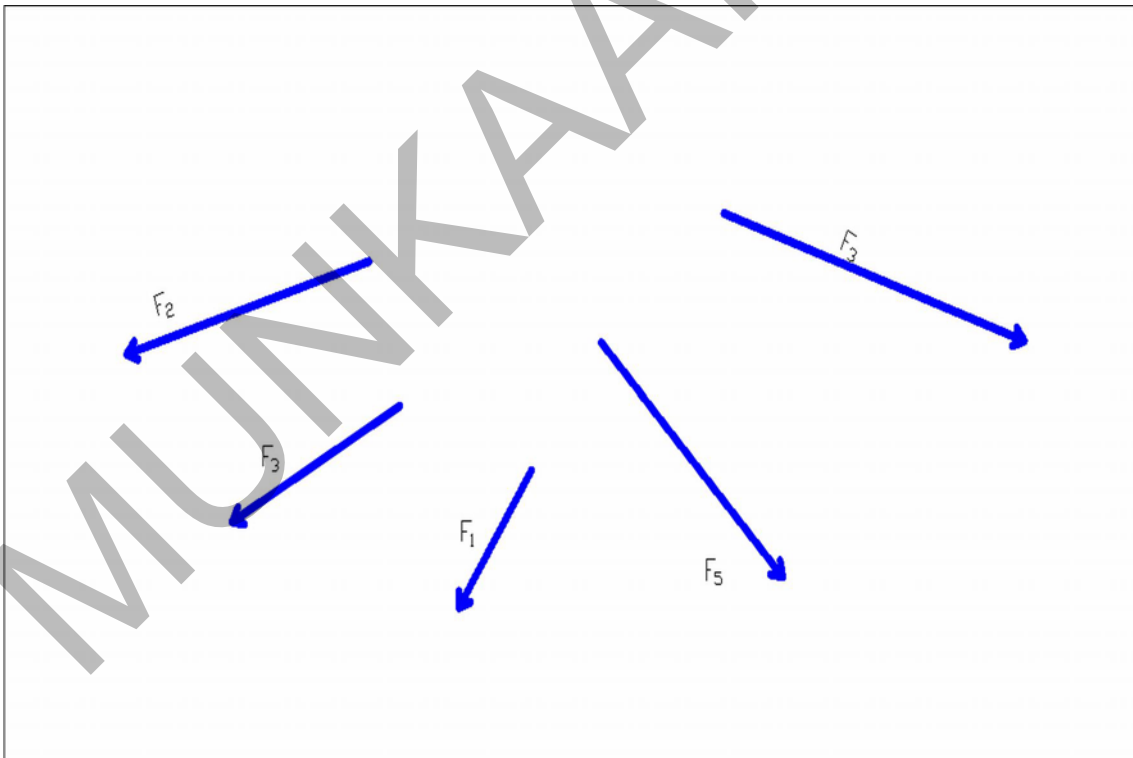


---

**9. feladat**

Kötélszög módszer alkalmazásával szerkesztéssel határozza meg az alábbi síkbeli erőrendszer eredőjének nagyságát és helyét, ha az erőlépték  $1 \text{ cm} = 5 \text{ KN}$ !

$F_1 = 10 \text{ KN}$ ,  $F_2 = 20 \text{ KN}$ ,  $F_3 = 25 \text{ KN}$ ,  $F_4 = 15 \text{ KN}$ ,  $F_5 = 20 \text{ KN}$



12. ábra. Síkbeli erőrendszer gyakorló feladathoz

## MEGOLDÁSOK

### 1. feladat

Erő fogalma: Az erő nem más, mint az a hatás, amely a test mozgásállapotát irány vagy nagyság szerint megváltoztatja.

Erőpár fogalma: Két párhuzamos hatásvonalon működő, azonos nagyságú, de ellentétes irányú erőt erőpárnak nevezünk. Az ellentétes erők összege nulla nagyságú, de van hatása: nyomaték, amely a sík bármely pontjaira felírva azonos.

Nyomaték: Síkban működő  $F$  erő ugyanezen síkban lévő  $P$  pontra képzett forgatónyomatékát úgy határozhatjuk meg, ha az  $F$  erő hatásvonalának a  $P$  ponttól mért távolságát – az erő karját  $(a)$  – megszorozzuk az erő nagyságával.

Erő vetülete: Egy síkban működő  $F$  erő  $t$  tengelyre vonatkoztatott irányított vetületét úgy kapjuk meg, hogy az  $F$  erő kezdő és végpontját a  $t$  tengelyre merőleges vetítő vonalakkal a  $t$  tengelyre vetítjük. Ekkor egy  $F_t$  vektort kapunk. Ekkor a  $F$  erő  $t$  tengely irányú vetülete.

### 2. feladat

1. Merev testre ható két erő akkor és csak akkor van egyensúlyban, ha a két erő hatásvonala közös, nagysága azonos, iránya ellentétes.

2. Három, különböző hatásvonalon működő erő akkor és csak akkor lehet egyensúlyban, ha közös pontban metszik egymást a hatásvonalak és az erők vektoraiból zárt, nyílfolytonos háromszög szerkeszthető.

3. Merev testre működő erőrendszer hatása nem változik, ha az adott erőrendszerhez egyensúlyban levő erőket adunk hozzá, vagy az erőrendszerből ilyeneket eltávolítunk. Ebből következik, hogy a merev testre ható erők saját hatásvonalukon bárhova elcsúsztathatók – a támadáspont a hatásvonalon bárhol felvehető.

4. Minden erőhatás (akció) ellenhatást (reakciót) vált ki, s e párosával jelentkező két ellentétes erőhatás közös hatásvonalon működik és egymással egyenlő.

### 3. feladat

20 KNm nyomaték megegyezik 10 KN mértékű erőpárral, ha a két egymással ellentétes irányú erő egymástól 2 m távolságra van, vagy 5 KN-ú erőpár 4 m távolságban, esetleg 4 KN mértékű erőpár egymástól 5 m távolságban.

### 4. feladat

Egy erő tetszőleges pontba való áthelyezésével egy az eredetivel párhuzamos hatásvonalú és megegyező nagyságú erő, valamint egy nyomaték keletkezik.

Az  $F_3$  erő áthelyezve:  $F_3' = 10 \text{ KN}$ , a nyomaték  $M_3 = F_3 * 5 \text{ m} = -10 \text{ KN} * 5 \text{ m} = -50 \text{ KNm}$ . Az  $M_3$  nyomaték negatív, mert az  $F_3$  erő a H pontra vonatkozóan az óramutató járásával ellentétes irányban forogtat.

Az  $F_1$  erő áthelyezésekor az erő hatásvonalával párhuzamos hatásvonal könnyen felvehető, így a H pontban egy  $5 \text{ KN}$  nagyságú  $F_1'$  keletkezik. A nyomaték kiszámításához azonban az  $F_1$  erőt fel kell bontani összetevőire.

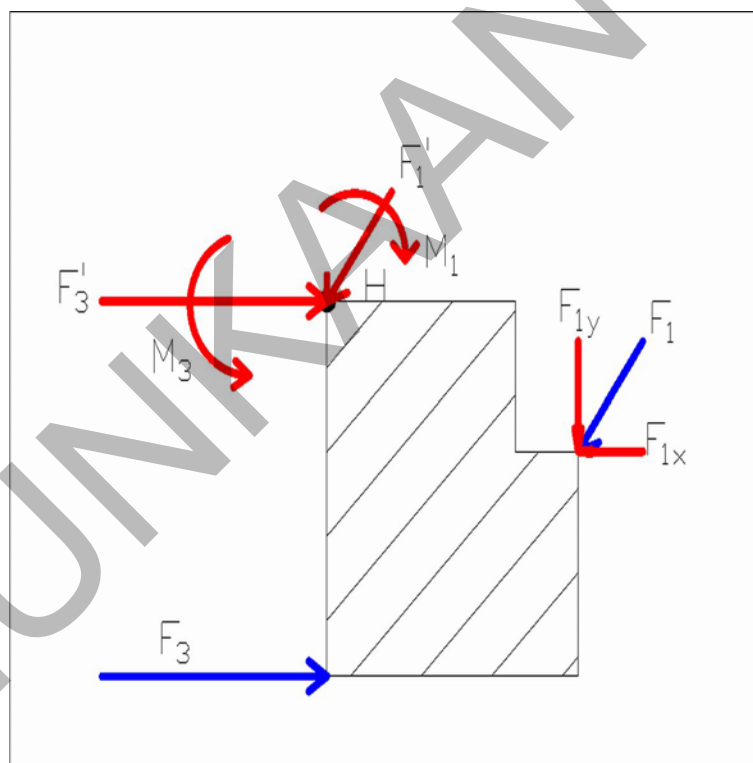
$$F_{1x} = 5 \text{ KN} * \cos 60 = 2.50 \text{ KN}$$

$$F_{1y} = 5 \text{ KN} * \sin 60 = 4.33 \text{ KN}$$

Ellenőrzés:  $4.332 + 2.502 = 5$  ebből következik  $F_1 = 5 \text{ KN}$ . (Az ellenőrzés csak a számításra ad ellenőrzést a feladat jó megoldására nem!)

$$M_1 = 2.50 \text{ KN} * 2 \text{ m} + 4.33 \text{ KN} * 4 \text{ m} = 22.32 \text{ KNm}$$

A nyomaték a H pontban.  $M_H = -27.68 \text{ KNm}$



13. ábra. Erő áthelyezése

**5. feladat**

Első lépésben tanulmányozzuk az erőrendszert. Az ábrából megállapítható, hogy az F3 erő hatásvonalát átmegegy a T ponton, amelyre a nyomatékot fel kell írni. Ha az erő hatásvonalát átmegegy a síkbeli ponton, akkor az erőkar ebben az esetben 0, így az F3 erő t síkbeli pontra vonatkoztatott nyomatéka is nulla, ezért ezt a számításban nem kell bevonni. Az ábrából továbbá az is megállapítható, hogy az F2 és az F5 erő nagysága azonos 10 KN de irányuk ellentétes, így erőpárt alkotnak. Az erőpár alkotóelemei közötti távolság az ábráról leolvasható: 10.50 m. Ezek alapján az erőpár nyomatékkal helyettesíthető, melynek nagysága:  $M = F * t$ , ahol az  $F=10$  KN,  $t=10.50$ . A nyomaték  $M_e=105$  KNm. Az is megállapítható, hogy az F1, F2 és az F5 erő az óramutató járásával ellentétesen azaz negatív, az F4 és F6 erő pedig az óramutató járásával megegyezően azaz pozitív értelemben forgat a T síkbeli pontra.

Ezután az erő nyomatéka alfejezetben található alapképlet alapján számítsuk ki a T pontra az erőrendszer nyomatékát! Behelyettesítve:

$$M_T = - 20\text{KN} * 9.00\text{m} - 10\text{KN} * 4.50\text{m} + 10\text{KN} * 3.00\text{m} - 10\text{KN} * 6.00\text{m} + 5\text{KN} * 5.00\text{m} = - 180 \text{KNm} - 45 \text{KNm} + 30\text{KNm} - 60 \text{KNm} + 25 \text{KNm} = - 230 \text{KNm}$$

Másik megoldás, ha figyelembe vesszük, hogy az erőrendszerben egy erőpár található:

$$M_T = - 20\text{KN} * 9.00\text{m} + 10\text{KN} * 3.00\text{m} + 5\text{KN} * 5.00\text{m} - 105 \text{KNm} = - 180 \text{KNm} + 30 \text{KNm} + 25 \text{KNm} - 105 \text{KNm} = - 230 \text{KNm}$$

Ezzel a síkbeli erőrendszer T pontra vonatkozó nyomatékát meghatároztuk, amely negatív előjelű.

**6. feladat**

A feladat megoldása előtt tanulmányozzuk a feladatot! Látható, hogy a testre két ferde erő és egy vízszintes irányú erő hat. A testet azonban úgy méretezték, hogy csak vízszintes és függőleges irányú távolságokat adtak meg, így az erők A pontra vonatkoztatott erőkarját nem tudjuk megállapítani. Erre megoldás az, hogy a ferde erőket felbontjuk vízszintes és függőleges összetevőikre. Az összetevők távolságát az A ponttól a méretezés alapján már meg tudjuk állapítani.

A ferde erők felbontását az erő vetülete című alfejezetben található alapképletek alapján kell elvégezni.

Az F1 erő összetevői a következők:

$$F_{1x} = 10 \text{ KN} * \cos 60 = 5 \text{ KN}$$

$$F_{1y} = 10 \text{ KN} * \sin 60 = 8.66 \text{ KN}$$

$$F_{2x} = 15 \text{ KN} * \cos 45 = 10.61 \text{ KN}$$

$$F_{2y} = 15 \text{ KN} * \sin 45 = 10.61 \text{ KN}$$

$$F_{3x} = 15 \text{ KN}$$

$$\begin{aligned} MA = & - 5 \text{ KN} * (1.76\text{m} + 1.75\text{m}) - 8.66 \text{ KN} * (2.94\text{m} + 2.39\text{m}) - 10.61 \text{ KN} * 2.69\text{m} + \\ & 10.61\text{KN} * 6.21\text{m} + 15 \text{ KN} * 1.76\text{m} = -17.55 \text{ KNm} - 46.16 \text{ KNm} -28.54 \text{ KNm} + 65.89 \text{ KNm} \\ & + 26.40 \text{ KNm} = + 0.04 \text{ KNm} \end{aligned}$$

## 7. feladat

A vektorábrán az erő nagyságát és irányát erővektorként ábrázoljuk. Az erő vektorát egy tetszőleges pontból, a vektor kezdőpontjából, az erő hatásvonalával párhuzamos egyenes vonaldarabbal ábrázoljuk, melynek hossza az erő nagyságával arányos, az erő irányát pedig nyílhegy jelzi.

## 8. feladat

Az eredő erő számításához először a feladatban szereplő ferde erők vízszintes és függőleges vetületeit kell meghatározni. Ezeknek a vetületeknek a számítása a 6-os számú feladat megoldásánál található, így itt ezeket már nem részletezzük.

Először az eredőerő vízszintes és függőleges komponensét határozzuk meg:

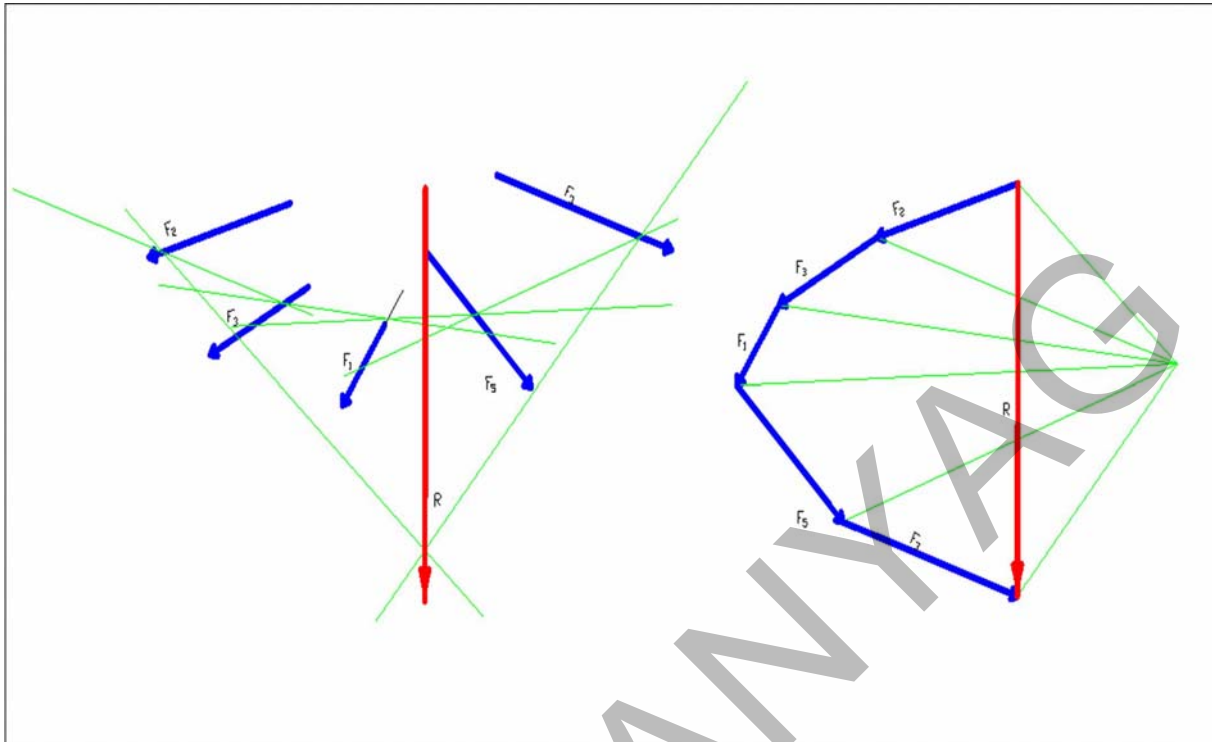
$$R_x = - 5 \text{ KN} + 10.61 \text{ KN} + 15 \text{ KN} = + 20.61 \text{ KN}$$

$$R_y = + 8.66 \text{ KN} - 10.61 \text{ KN} = - 1.95 \text{ KN}$$

$$R = 20.70 \text{ KN}$$



9. feladat



14. ábra Eredő szerkesztése kötél sokszög módszerrel

## IRODALOMJEGYZÉK

### FELHASZNÁLT IRODALOM

[http://mechanika.ymmf.hu/Downloads/stat001\\_web\\_20070921.pdf](http://mechanika.ymmf.hu/Downloads/stat001_web_20070921.pdf) (2010. 06. 09.)

[http://mechanika.ymmf.hu/Downloads/meretezes01\\_20070919.pdf](http://mechanika.ymmf.hu/Downloads/meretezes01_20070919.pdf) (2010. 06. 09.)

<http://www.freeweb.hu/gepeszmernoklap/statika.pdf> (2010. 06. 09.)

[http://193.6.55.19/letolt/HEFOP/Meretezes\\_alapjai\\_%28STNB240%29.pdf](http://193.6.55.19/letolt/HEFOP/Meretezes_alapjai_%28STNB240%29.pdf) (2010. 06. 09.)

[http://www.mech.uni-miskolc.hu/~szirbik/notes/statika\\_levelazo\\_jegyzet.pdf](http://www.mech.uni-miskolc.hu/~szirbik/notes/statika_levelazo_jegyzet.pdf) (2010. 06. 09)

<http://www.dgf.hu/mechanika1-statika.pdf> (2010. 06. 09)

Dr. Matuscsák Tamás: Statika építészeknek, Műegyetemi Kiadó, 1993

Dr. Rusznák György – Gimesy Mária: Statika példatár, Műegyetemi Kiadó, 1995

Bán Tivadarné: Statika, Tankönyvmester Kiadó, 2006

A(z) 0688–06 modul 003–as szakmai tankönyvi tartalomeleme felhasználható az alábbi szakképesítésekhez:

A szakképesítés OKJ azonosító száma:	A szakképesítés megnevezése
54 582 04 0000 00 00	Mélyépítő technikus
54 582 03 0000 00 00	Magasépítő technikus

A szakmai tankönyvi tartalomelem feldolgozásához ajánlott óraszám:  
10 óra

MUNKANYELV

MUNKANYAG

A kiadvány az Új Magyarország Fejlesztési Terv  
TÁMOP 2.2.1 08/1-2008-0002 „A képzés minőségének és tartalmának  
fejlesztése” keretében készült.

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap  
társfinanszírozásával valósul meg.

Kiadja a Nemzeti Szakképzési és Felnőttképzési Intézet  
1085 Budapest, Baross u. 52.  
Telefon: (1) 210-1065, Fax: (1) 210-1063

Felelős kiadó:  
Nagy László főigazgató