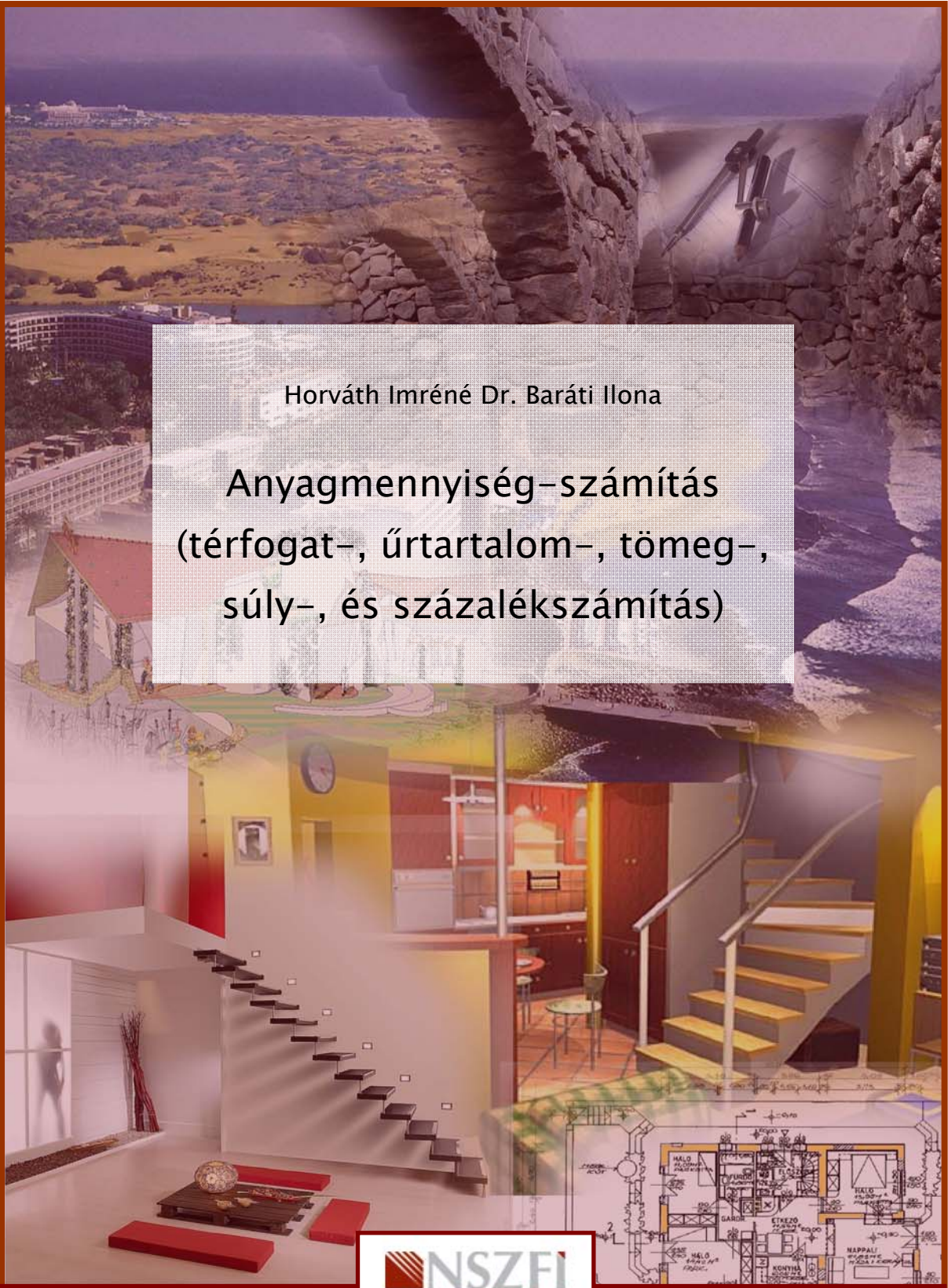




Horváth Imréné Dr. Baráti Ilona

Anyagmennyiség-számítás (térfogat-, űrtartalom-, tömeg-, súly-, és százalékszámítás)



NSZFI
NEMZETI SZAKKÉPZÉSI
ÉS FELNŐTTKÉPZÉSI INTÉZET

A követelménymodul megnevezése:

Építőanyag-ipari közös feladatok I.

A követelménymodul száma: 0504-06 A tartomelem azonosító száma és célcsoportja: SzT-012-50

MUNKANYAG

MENNYISÉG, MÉRTÉKEGYSÉG

ESETFELVETÉS – MUNKAHELYZET

Az üzem vezetője a következő feladattal bízta meg Önt:

„Kolléga, határozza meg a raktárban található zsákos és vödrös kiszerezésű, de anyagában azonos adalék mennyiségét m^3 -ben! Az adalék egy m^3 -e tárolt (lazán, zsákokba töltött) állapotban 800 kg. Írja le a számítást, azt is kérem délután.”

Ön bemegy a raktárba, és látja, hogy a raktárkészlet „változatos képet” mutat. Van 13 db 25 kg-os zsák, 8 db 30 kg-os zsák, 40 db 20 kg-os zsák, és 12 db 10 literes vödör, de az utolsó csak félig van megtöltve.

Hogyan lesz ebből m^3 -ben kimutatott mennyiség?

SZAKMAI INFORMÁCIÓTARTALOM

1. Fizikai mennyiség, mérés, mértékegység, számérték

A különböző fizikai jelenségeket és folyamatokat, a testeket és anyagokat fizikai mennyiségekkel jellemezzük. A fizikai mennyiségeket méréssel állapítjuk meg. A mérés eredményét egy számértékkel és egy mértékegységgel adjuk meg oly módon, hogy a számérték és a mértékegység algebrai szorzatát képezzük. A mértékegység az azonos típusú fizikai mennyiségek összehasonlítására alkalmas egyezményesen elfogadott etalon, mely bárhol, bármikor reprodukálható, azaz mindig rendelkezésre áll. A mérés során azt határozzuk meg, hogy a mérendő mennyiségben hányszor van meg a mértékegység. Az így kapott számérték és a mértékegység szorzata adja a keresett fizikai mennyiséget.

Példa:

Feladatunk egy szabálytalan négyszög alakú építési telek bekerítése. A terület ki van jelölve, de a méreteket nem ismerjük. Nekünk kell megrendelni a szükséges mennyiségű fonott kerítéshálót.

Alkalmazva a fenti fogalmakat:

A keresett fizikai mennyiség: egy építési telek kerülete.

Mértékegység: a méter (m), ami egy méter beosztású fém mérőszalag formájában áll rendelkezésünkre.

Mérés: oldalanként megmérjük, hogy az 1 m hányszor fér rá a négyszög oldalaira.

A négyszög oldalait jelöljük **a, b, c, d** betűkkel.

A mérés során azt kaptuk, hogy

$$a = 44$$

$$b = 32$$

$$c = 48$$

$$d = 35$$

ezeket összeadva 159-et kapunk.

Ez azt jelenti, hogy a négy oldalban összesen 159-szer van meg az 1 m.

A számérték 159, ami a mértékegységgel összeszorozva $159 \cdot 1 \text{ m} = 159 \text{ m}$.

Képletszerűen és számokkal behelyettesítve:

$$K = a + b + c + d = 44 \text{ m} + 32 \text{ m} + 48 \text{ m} + 35 \text{ m} = 159 \text{ m}$$

Ilyen mennyiségű fonott kerítéshálót kell rendelnünk.

A példában használt fogalmakat még egyszer összefoglalva:

Mértékegység: méter (m)

Számérték: 159

Fizikai mennyiség: egy építési telek kerülete, $K = 159 \text{ m}$

2. Alapmennyiség, alapegység, származtatott egység

Az alapegység olyan mértékegység, amit minden más mértékegységtől függetlenül állapítottak meg. Az összes többi mértékegységet az alapegységekből származtatjuk geometriai és fizikai összefüggések alapján. Az alapegységekkel mért fizikai mennyiségeket alapmennyiségeknek nevezzük. Az alapmennyiségek számát gyakorlati megfontolások alapján állapították meg, ugyanis túl kevés alapmennyiség esetén nagyon bonyolulttá válnának a származtatott egységek. Ezt figyelembe véve a nemzetközileg elfogadott és hazánkban is érvényben lévő mértékegység-rendszerben 7 alapmennyiség van. Ezek a következők:

Alapmennyiség neve		Alapegység	
		neve	jele
I.	Hosszúság	méter	m
II.	Tömeg	kilogramm	kg
III.	Idő	másodperc	s
IV.	Áramerősség	amper	A
V.	Hőmérséklet	kelvin	K
VI.	Fényerősség	kandela	cd
VII.	Anyagmennyiség	mol	mol

1. ábra. Alapmennyiségek és alapegységek táblázata

Példa:

Egy téglalap területét kell kiszámítanunk. A rövidebb oldal $a = 5 \text{ m}$, a hosszabbik oldal pedig $b = 12 \text{ m}$. A területet a két oldal szorzata adja:

$$T = a \cdot b = 5 \text{ m} \cdot 12 \text{ m} = 60 \text{ m} \cdot \text{m} = 60 \text{ m}^2$$

A téglalap területe: $T = 60 \text{ m}^2$

A terület mértékegysége egy származtatott egység, a m^2 , amit a hosszúság alapmennyiség mértékegységéből a m -ből származtattunk.

A fizikai mennyiségekkel végzett algebrai műveleteket a mértékegységekre is ki kell terjeszteni, jelen esetben a téglalap két oldalának számértékét és mértékegységét is összeszoroztuk.

Fontos:

Általánosságban elmondhatjuk, hogy a fizikai mennyiségekkel végzett algebrai műveletek közül a szorzásnál és az osztásnál a számértéket a számértékkel, a mértékegységet a mértékegységgel szorozzuk illetve osztjuk. Összeadásnál és kivonásnál csak teljesen azonos mértékegységű fizikai mennyiségeket használhatunk. Ilyenkor a számértékekkel elvégezzük az összeadást illetve a kivonást, a mértékegységet pedig változatlan alakban írjuk az eredmény után.

Példa:

Egy építkezés anyagraktárában nagy mennyiségű jelöletlen, ismeretlen anyagú, szürkés színű falazóelemet találtunk. Feladatunk, hogy a falazóelem jellemző fizikai mennyiségeiből próbáljuk meg beazonosítani a falazóelem típusát.

A falazóelem téglatest alakú, melynek az egy csúcsba befutó éleit jelöljük **a**, **b**, **c** betűkkel.

Hosszméréssel megállapítjuk a téglatest három élének hosszát, ezek a következők:

$$a = 600 \text{ mm}$$

$$b = 200 \text{ mm}$$

$$c = 300 \text{ mm}$$

A három oldal algebrai szorzata adja a téglatest térfogatát amit jelöljünk **V** betűvel.

Képletszerűen:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Számokkal behelyettesítve:

$$V = 600 \text{ mm} \cdot 200 \text{ mm} \cdot 300 \text{ mm} = 36\,000\,000 \text{ mm} \cdot \text{mm} \cdot \text{mm} = 36\,000\,000 \text{ mm}^3$$

Az eredménnyel kapcsolatban több dolog is kényelmetlennek tűnhet:

a) Nehézkes a részsámításoknál minden mennyiség után kiírni a mértékegységet, ha az egyébként a felírt számértékek alapján teljesen egyértelmű, ezért ilyen esetekben eltekinthetünk ettől, a végeredménynél viszont minden esetben ki kell írni a mértékegységet, lehetőleg a legtömörebb formában, tehát a $\text{mm} \cdot \text{mm} \cdot \text{mm}$ helyett **mm^3** .

b) A számszerű végeredmény ugyan helyes, de nehezen tudjuk elképzelni, hogy mennyi is az a 36 millió köbmilliméter. Célszerűbb lenne egy olyan mértékegység, ami kézzelfoghatóbbá tenné a számítást és az eredményt is. Jelen esetben, ha **milliméter** helyett **deciméterben** fejeznénk ki az oldalhosszakát, akkor a számítást fejben is könnyen elvégezhetjük és a végeredmény is könnyen ellenőrizhető:

mivel **1 dm = 100 mm** ezért a példa adatai **dm**-ben:

$$a = 6 \text{ dm}, b = 2 \text{ dm}, c = 3 \text{ dm}$$

$$V = 6 \cdot 2 \cdot 3 = 36 \text{ dm}^3$$

Ha figyelembe vesszük, hogy 1 dm^3 azonos 1 literrel, akkor azonnal látjuk, hogy a kapott számeredmény összhangban van-e a valóságban előttünk lévő falazóelem becsült térfogatával. Gondoljunk például a 40 literes otthoni akváriumunkra és rögtön látjuk a két test térfogatának körülbelüli hasonlóságát. Az ilyen jellegű műszaki számításoknál mindig nagyon fontos, hogy a számítás elvégzése előtt már legyen egy elképzelésünk a várható eredményről, amit a számítással kapott eredményekkel mindig össze kell hasonlítani. Ha túl nagy a különbség a becsült és számított eredmény között, esetleg még a nagyságrendek sem azonosak, akkor valószínűleg valahol hibáztunk.

A fenti számításban a keresett fizikai mennyiség a téglatest térfogata volt, melynek mértékegységét, a mm^3 -t illetve a dm^3 -t a hosszúság alapegység mértékegységéből származtattuk. A m alapegységből származtatott térfogat mértékegység a m^3 .

A mm és a dm nem származtatott egységek hanem a m alapegység törtrészei, használatuk megengedett ($1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$, $1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$, $1 \text{ dm} = 100 \text{ mm}$).

A példa további részében a falazóelem testsűrűségét határozzuk meg. A testsűrűséget a következő összefüggésből számíthatjuk ki:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

ahol

ρ : (görög ró): a testsűrűség,

m : a tömeg, (Vigyázat, a jele csak véletlenül egyezik a méter jelével!)

V : a térfogat, amit a fentiekben már kiszámoltunk.

A falazóelem tömegét bármilyen tömegmérésre alkalmas mérleggel meg tudjuk mérni, ha annak méréshatára nagyobb, mint a mérendő tömeg. Mivel a falazóelemet két kézzel viszonylag könnyen meg tudtuk emelni, így valószínű, hogy annak tömege 50 kg-nál kevesebb (50 kg megemelése egy átlagos fizikumú embernek már komoly erőfeszítésbe kerül).

Ezzel nagyjából már meg is becsültük a mérés várható eredményét, valószínűleg 15 és 35 kg között kell lennie a falazóelem tömegének, így akár egy személyi mérleg is alkalmas arra, hogy a falazóelem tömegét megmérjük.

A mérést elvégezve a mérleg 24 kg-ot mutatott, tehát a falazóelem tömege 24 kg.

Ezek után a testsűrűség:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{24 \text{ kg}}{36 \text{ dm}^3} = 0,666 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$$

ANYAGMENNYISÉG-SZÁMÍTÁS (TÉRFOGAT-, ŰRTARTALOM-, TÖMEG-, SÚLY-, ÉS SZÁZALÉKSZÁMÍTÁS)

A keresett fizikai mennyiség tehát a testsűrűség, mértékegysége a $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$, amit a hosszúság és a tömeg alapegységek mértékegységeiből származtattunk. A kapott eredményt látva észre kell vennünk, hogy $1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ -nél kisebb értéket kaptunk, ami azért érdekes, mert a víz sűrűsége éppen $1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ (1 liter víz tömege 1 kg). Ez azt jelenti, hogy egy víznél könnyebb anyagról van szó, tehát számítás szerint úszik a vízen. Ez kicsit szokatlan egy kőszerű, tömörnek látszó, szilárd falazóelem esetén, de a számításokat ellenőrizve ismét ezt az eredményt kaptuk. Ez azt jelenti, hogy egy igen könnyű, valószínűleg nagy pórustartalmú, színéből ítélve cement kötőanyagot is tartalmazó termékről van szó. Ezek után az ismert pórusbeton elemeket gyártó cégek katalógusait átnézve könnyen azonosíthatjuk a terméket. (YTONG P2-0,5 600x200x300 falazóelem)

Példa:

Ebben a példában egy olyan származtatott egységet mutatunk be amelyet szintén az alapegységek mértékegységeiből képeztünk, de gyakori használata miatt önálló nevet is kapott.

Ismételjük át Newton második törvényét, amit a dinamika alaptörvényének is neveznek:

Egy test gyorsulása egyenesen arányos a testre ható, a gyorsulással azonos irányú erővel, és fordítottan arányos a test tömegével.

Képletszerűen:

$$a = \frac{F}{m}$$

illetve ebből következően

$$F = m \cdot a$$

ahol a betűk jelentése:

a : a gyorsulás

F : az erő

m : a tömeg

Mivel az erő sok más fizikai mennyiségben is szerepel (teljesítmény, nyomás, feszültség, stb.) ezért célszerűnek látszott az erő mértékegységét külön névvel és jellel is ellátni, így az erőt is tartalmazó származtatott mennyiségek mértékegységei egyszerűsödtek.

Newton második törvényéből következően az **1 kg** tömegű test $1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ -tel való gyorsításához szükséges erő:

$$F = 1 \text{ kg} \cdot 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2} = 1 \text{ N}$$

Ezt a fizikai mennyiséget választották az erő mértékegységének és **newton**-nak nevezték el, a jele pedig **N**.

A képletben szereplő gyorsulás mértékegysége ($\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$), a sebesség ($\frac{\text{m}}{\text{s}}$) és az idő (s) mértékegységeiből tevődik össze, mivel a gyorsulás nem más mint az időegység alatti sebességváltozás. A sebesség mértékegységét, a $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ -ot és így végső soron a gyorsulás mértékegységét, a $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ -et is a hosszúság és az idő alapmennyiségek mértékegységeiből származtattuk.

Az erő mértékegysége a tömeg, a hosszúság és az idő alapmennyiségek mértékegységeiből tevődik össze.

A fenti példa speciális esete a nehézségi erő, ami nem más mint a testekre ható, a Föld tömege által kifejtett gravitációs erő. Köznapi nyelven ez okozza a testek súlyát. Mértékét a fenti képlettel tudjuk meghatározni, de speciális volta miatt az alábbi jelöléseket használjuk, utalva a gravitációs jellegre:

G : a testre ható nehézségi erő vagy súlyerő

g : a nehézségi gyorsulás, értéke a földfelszín közelében hazánkban: $9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

m : a test tömege

Ezek után az 1 kg tömegű testre ható nehézségi erő:

$$G = m \cdot g = 1 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,81 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2} = 9,81 \text{ N} \approx 10 \text{ N}$$

Az építőipari műszaki számításokban megengedett kerekítés: $9,81 \text{ N} \approx 10 \text{ N}$.

(Tanulásiirányító 1. pont)

Fontos:

A tömeg és a súly nem azonos fogalmak!

A súly erő jellegű származtatott mennyiség, mértékegysége az **N (newton)**.

A tömeg alapmennyiség, mértékegysége a **kg**.

1 kg tömegű test súlya ~10 N (pontosan 9,81 N)

3. A mértékegység-rendszerek

Az emberiség fejlődése során nagyon sokféle mértékegység alakult ki. Gyakran ugyanannak a fizikai mennyiségnek a mérésére országoként más-más mértékegységet használtak. Jellemző erre a helyzetre, hogy a XVIII. századi Európában több mint 100 féle hosszúság és több mint 100 féle tömeg mértékegység volt használatban. (Tanulásiirányító 2. pont)

Az egységes mértékegység-rendszer kialakítására először 1793-ban tettek kísérletet Franciaországban. Ekkor alkották meg a méter és a kilogramm mértékegységeket. A métert a Föld méreteiből vezették le.

Az első meghatározás szerint 1 méter egyenlő volt a Föld Párizson áthaladó délkörének $1/40\,000\,000$ (negyvenmilliomod) részével. A tömeg mérésére használt mértékegységet, az 1 kg-ot pedig az 1 dm^3 (1 liter) 4 °C -os desztillált víz tömegeként határozták meg. A méterről és a kilogrammról is platina-íridium ötvözetből etalont készítettek, melyek ma is láthatóak a Nemzetközi Súly- és Mértékügyi Hivatalban, a franciaországi Sèvres-ben.

Érdekesség, hogy a tömeg mértékegységének mai is ezt az etalont fogadjuk el, a hosszúság mértékegységét azonban a mai követelményeknek megfelelően pontosabban kell meghatározni.

A méter fénysebességen alapuló meghatározásának módszerét a magyar származású tudós, Bay Zoltán javaslata alapján 1983-ban fogadták el. Az ő meghatározása alapján 1 méter az a távolság, amelyet a fény vákuumban $1/299\,792\,458$ másodperc alatt tesz meg.



2. ábra. A méter egyik első etalonja Párizsban a Luxemburg kertben¹



3. ábra. A méter platina-irídium etalonjai²

¹ www.infres.enst.fr/~clement/paris/Jardin-Luxembourg/images/metre-etalon.jpg (2010.05.05)

² www.onlineconversion.com/images/Platinum-Iridium_meter_bar.jpg (2010.05.05)



4. ábra. 1 kg tömegű platina-íridium etalon³

A mértékegység-rendszer fogalma Carl Friedrich Gauss (1777-1855) német matematikus és természettudós nevéhez fűződik, aki 1833-ban dolgozta ki az 2. pontban tárgyalt alap- és származtatott egységek rendszerének alapjait.

Gauss három alapmennyiségnek az egységeit választotta alapegységeknek és kimutatta, hogy ezekből minden más mechanikai mennyiség egysége leszámaztatható. A három alapmennyiségnek a hosszúságot, a tömeget és az időt választotta. Később az elektromosságtan és főleg az atomfizika fejlődése miatt újabb 4 alapmennyiséget is be kellett vezetni, de a geometriai és mechanikai jellegű gyakorlati számításokban általában elegendő a Gauss által meghatározott három alapmennyiség mértékegységének használata.

E rendszer másik fontos jellemzője, hogy a mértékegységek törtjeit és többszöröseit a 10-es számrendszer alapján, a 10 hatványaival képezi.

A hosszúság esetén:

$$1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$$

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$$

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$$

³ inm.cnam.fr/html/sti/inm/mga/illustrations/mga_etalon35.jpg (2010.05.05)

$$1 \text{ m} = 0,001 \text{ km}$$

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 10\,000 \text{ dm} = 100\,000 \text{ cm} = 1\,000\,000 \text{ mm}$$

vagy 10 hatványaival ugyanez:

$$1 \text{ km} = 10^3 \text{ m} = 10^4 \text{ dm} = 10^5 \text{ cm} = 10^6 \text{ mm}$$

A tömeg esetén:

$$1 \text{ kg} = 1\,000\,000 \text{ mg}$$

$$1 \text{ kg} = 1\,000 \text{ gr}$$

$$1 \text{ kg} = 100 \text{ dkg}$$

$$1 \text{ kg} = 0,001 \text{ t}$$

$$1 \text{ t} = 1000 \text{ kg} = 100\,000 \text{ dkg} = 1\,000\,000 \text{ gr} = 1\,000\,000\,000 \text{ mg}$$

vagy 10 hatványaival ugyanez:

$$1 \text{ t} = 10^3 \text{ kg} = 10^5 \text{ dkg} = 10^6 \text{ gr} = 10^9 \text{ mg}$$

A Gauss elképzelése nyomán kialakult mértékegység-rendszer nemzetközi elterjedését 1875-től számítjuk, amikor hazánkkal együtt 17 ország írta alá a Nemzetközi Méteregyezményt, de a XX. század közepére a felgyorsult technikai fejlődés következtében még egy ennél is átfogóbb, egyetemes mértékegységrendszer kidolgozása vált szükségessé.

1948 és 1958 között a Nemzetközi Súly- és Mértékügyi Bizottság a Méteregyezmény elveit tovább fejlesztve kidolgozta a **Mértékegységek Nemzetközi Rendszerét**, rövidítve az **SI-t** (Système International d'Unités), amit az Általános Súly- és Mértékügyi Értekezlet 1960-ban fogadott el.

Hazánkban egy 1976-os minisztertanácsi rendeletet írta elő az SI rendszerre való kötelező áttérést illetve 1980. január 1-jétől elrendelte az SI kizárólagos, kötelező használatát.

Az SI mértékegység-rendszer jellemzői:

- Az SI hét alapmennyiséget használ ami hét SI-alapegységet jelent, ezek függetlenek egymástól. (1. ábra)
Az SI a hét alapegységből származtatja a további fizikai mennyiségek mértékegységeit.
- Az SI a mértékegységek többszöröseinek illetve törtrészeinek képzésekor a 10-es számrendszert azaz a 10 hatványait használja.
- A mértékegység többszöröseit vagy törtrészeit a mértékegység elé írt un. prefixumokkal (előtagokkal) lehet képezni.

pl.:

prefixum: **milli**, jelentése: **ezredrész**

prefixum: **kilo**, jelentése: **ezerszeres**

milliméter – azonos a méter ezredrészével

kilométer – azonos a méter ezerszeresével

Az alábbi táblázatban (5. ábra) összefoglaltuk a használható prefixumok teljes sorát.

A kiemelt rész a leggyakrabban előforduló prefixumokat mutatja.

Prefixum	Jel	A mértékegység szorzója
yotta	Y	10^{24}
zetta	Z	10^{21}
exa	E	10^{18}
peta	P	10^{15}
terra	T	10^{12}
giga	G	10^9
mega	M	10^6
kilo	k	10^3
hekto	h	10^2
deka	da	10^1
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
mikro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
piko	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}
zepto	z	10^{-21}
yocto	y	10^{-24}

5. ábra. Prefixumok (előtagok) táblázata az SI szerint

Az SI mellett elterjedten használt még a brit mértékegység-rendszer (Imperial Unit System) is, amely nem az SI alapegységeit és nem a 10 hatványait használja. Jelenleg az Amerikai Egyesült Államokban, Ausztráliában, Japánban és több arab országban is ezt használják. Érdekesség, hogy a korábbi brit nemzetközösségi államok nagy része megmaradt ennél a mértékegység-rendszerénél, míg Nagy-Britannia az 1970-es években áttért az SI mértékegység-rendszerre.

Összefoglalásként válasz a felvetett esetre:

Az esetfelvetésben vázolt feladat megoldása tömeg, térfogat és sűrűség számítási feladatokra vezethető vissza.

Először meghatározzuk a tárolt anyag sűrűségét. Tudjuk, hogy az anyag 1 m^3 -e 800 kg tömegű. Ez egyben a sűrűségét is jelenti:

$$\rho = 800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Ezután összegezzük a különböző kiserelésű adalékanyagok tömegeit:

$$M_1 = 13 \cdot 25 = 325 \text{ kg}$$

$$M_2 = 8 \cdot 30 = 240 \text{ kg}$$

$$M_3 = 40 \cdot 20 = 800 \text{ kg}$$

Ez összesen:

$$M = M_1 + M_2 + M_3 = 1365 \text{ kg}$$

A sűrűség ismeretében a térfogatot a tömeg és a sűrűség hányadosaként határozhatjuk meg:

$$V_1 = \frac{M}{\rho} = \frac{1365}{800} = 1,706 \text{ m}^3$$

A vödörös kiserelésű adalék térfogatát annak figyelembevételével számoljuk ki, hogy $1 \text{ vödör} = 10 \text{ liter} = 0,01 \text{ m}^3$

$$V_2 = 11 \cdot 0,01 + 0,5 \cdot 0,01 = 0,115 \text{ m}^3$$

A raktárban található összes adalék térfogata:

$$V = V_1 + V_2 = 1,706 + 0,115 = 1,821 \text{ m}^3$$

TANULÁSIRÁNYÍTÓ

1. Keressen olyan cikkeket a világhálón amely a Holdra-szállásról ír! Gondolkodjon el azon, mi lenne, ha a Földön is a Holdra érvényes gravitáció működne! Adódhatnának-e ebből vicces helyzetek?

2. A hosszúság mérésére különösen sok mértékegységet használtak. Ezek némelyike még napjainkban is fel-felbukkan, legtöbbször a földterületek méreteivel kapcsolatosan. Nézzon utána lexikonokban annak, hány métert jelentenek az alábbi régi mértékegységek!

- kerékfordulás
- lépés
- mér föld
- órajárás

ÖNELLENŐRZŐ FELADATOK

1. feladat

Melyik a két legelterjedtebb mértékegység-rendszer, és hazánkban melyik használata kötelező? Válaszát írja a kijelölt helyre!

2. feladat

Mik az SI mértékegység-rendszer legfontosabb alapelvei? Válaszát írja a kijelölt helyre!

3. feladat

Nevezzen meg legalább három olyan SI szerinti alapmennyiséget, amit Ön szerint a hétköznapi életben a leggyakrabban használunk! Válaszában tüntesse fel a hozzájuk tartozó mértékegységeket is!

4. feladat

Mondjon néhány alapegységekből származtatott mértékegységet! Válaszát írja a kijelölt helyre!

5. feladat

Mi a szög SI szerinti mértékegysége és Ön szerint a szög miért nem alapegység? Indokolja választát írásban!

MEGOLDÁSOK

1. feladat

- Mértékegységek Nemzetközi Rendszere, rövidítve SI (Système International d'Unités)
- Brit mértékegység-rendszer (Imperial Unit System)
- Hazánkban 1980-tól az SI használata kötelező.

2. feladat

- Az SI hét alapmennyiséget használ ami hét SI-alapegységet jelent, melyek függetlenek egymástól.
- Az SI a hét alapegységből származtatja a további fizikai mennyiségek mértékegységeit.
- Az SI a mértékegységek többszöröseinek illetve törtrészeinek képzésekor a 10-es számrendszert azaz a 10 hatványait használja.

3. feladat

- Hosszúság – méter [m]
- Tömeg – kilogramm [kg]
- Idő – másodperc [s]

4. feladat

- Terület: m^2
- Térfogat: m^3
- Sűrűség: kg/m^3
- Gyorsulás: m/s^2
- Erő vagy súly: kgm/s^2 , N, newton

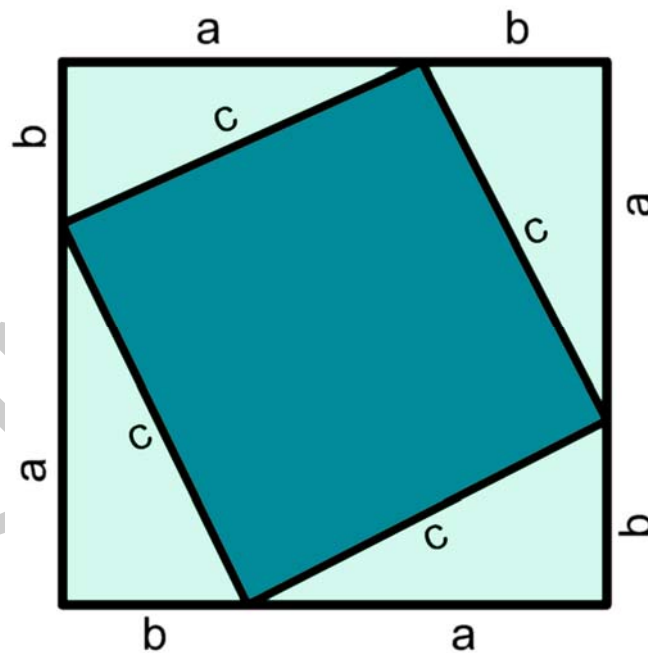
5. feladat

- Az SI mértékegység-rendszerben a **radián** a szög mértékegysége.
- A radián dimenzió nélküli, két hosszúság hányadosaként származtatott mértékegység. Egy R sugarú kör valamely középponti szögének radiánban mért értéke egyenlő az adott középponti szöghöz tartozó körív hosszának (s) és a kör sugarának (R) a hányadosával (s/R).

MATEMATIKAI ALAPOK

ESETFELVETÉS – MUNKAHELYZET

Ön a főtechnológus közvetlen munkatársa. Egyedi megrendelésre színezett padlóburkolólapot gyártanak. A tervezett burkolólap az ábrán látható mintázatú, mérete 40×40 cm. A mintázat belső négyzetének sarkai a burkolólap oldalait a harmadaiban érintik. Azt a feladatot kapta, hogy határozza meg a gyártáshoz szükséges kétféle színezőanyag mennyiségének arányát, feltételezve, hogy mindkét anyagból ugyanakkora felülethez ugyanannyi mennyiségű színezőanyag szükséges. Próbálja meg számítás nélkül megmondani, hogy a és b milyen aránya mellett lehetne a kétféle színezőanyagból azonos mennyiséget rendelni.



6. ábra. Burkolólap-minta

SZAKMAI INFORMÁCIÓTARTALOM

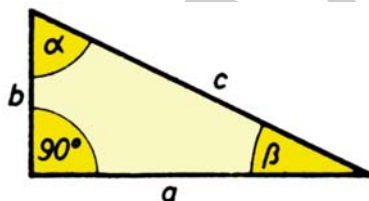
A kerület, terület, felszín és térfogat számításához csak a legegyszerűbb alapeseteknél elegendő a négy számtani alpművelet. Egy négyzet vagy téglalap kerületét és területét könnyen meg tudjuk határozni az összeadás és szorzás műveletekkel, de már egy általános háromszöget is tartalmazó összetettebb síkidom vagy test esetén további összefüggések ismerete is szükséges.

A következőkben összefoglaljuk azokat a legfontosabb matematikai összefüggéseket, amelyekre az ilyen jellegű számításoknál gyakran szükségünk lesz.

1. Pitagorasz-tétel

Pitagorasz-tétel:

Egy derékszögű háromszög átfogójának négyzete egyenlő a befogók négyzeteinek összegével.



7. ábra. Derékszögű háromszög a Pitagorasz-tétel szemléltetéséhez

Képlettel felírva:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

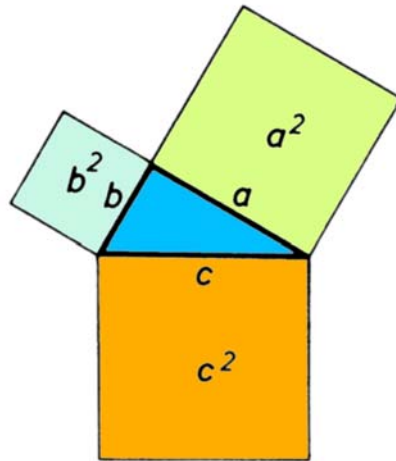
Ebből a háromszög oldalaira a következő összefüggések adódnak:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

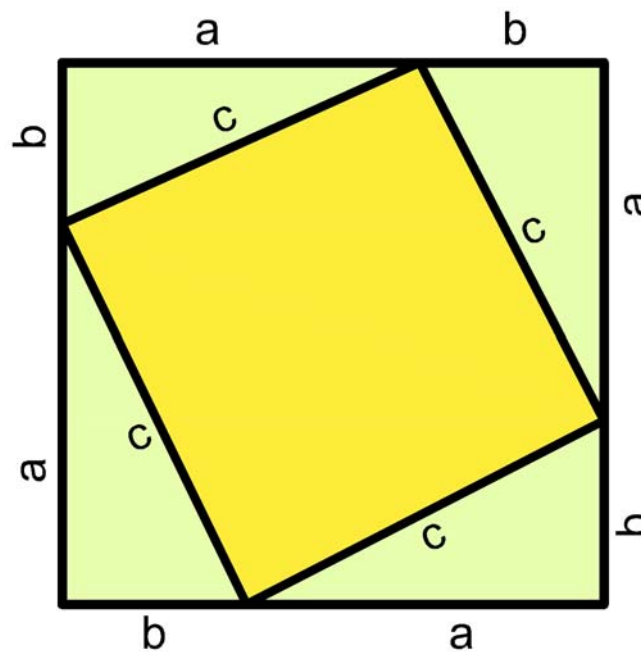
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

A Pitagorasz-tételnek van egy területekkel kapcsolatos megfogalmazása is, hiszen a^2 , b^2 és c^2 nem más mint az a , b illetve c oldalú négyzeteknek a területei. Ha ezeket a négyzeteket rárajzoljuk a derékszögű háromszög megfelelő oldalaira akkor a 8. ábrán látható elrendezést kapjuk. Ez azt jelenti, hogy az átfogóra rajzolt négyzet területe egyenlő a befogókra rajzolt négyzetek területeinek összegével.



8. ábra. Pitagorasz tétele területekkel szemléltetve

A Pitagorasz-tételt legegyszerűbben a 9. ábrával lehet bizonyítani. A külső nagy négyzet területét kétféleképpen is felírhatjuk. Egyszer a nagy négyzet oldalának $(a+b)$ négyzetre emelésével (T_1), egyszer pedig a nagy négyzetet alkotó 4 db abc oldalú derékszögű háromszög és a belső c oldalú négyzet területeinek összegeként (T_2). Mivel a kétféleképpen kiszámolt területnek azonosnak kell lennie ($T_1=T_2$), ezért felírhatunk egy területek azonosságát kifejező egyenletet, melynek rendezése után a jól ismert képlethez jutunk.



9. ábra. A pitagorasz-tétel bizonyítása

$$T_1 = (a + b)^2$$

$$T_2 = 4 \frac{ab}{2} + c^2$$

$$T_1 = T_2$$

$$(a + b)^2 = 4 \frac{ab}{2} + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

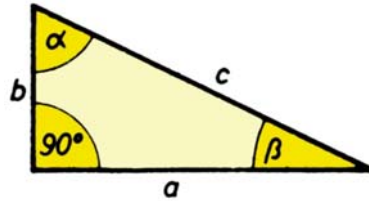
$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

2. Trigonometria, szögfüggvények

A trigonometria a háromszögek ismert adataiból az ismeretlen adatok kiszámításához szükséges összefüggésekkel foglalkozik.

A 10. ábrán látható derékszögű háromszöghöz hasonló bármilyen más méretű derékszögű háromszög megfelelő oldalainak egymáshoz viszonyított aránya mindaddig nem változik, amíg az α szöget meg nem változtatjuk. Ezeket az arányokat szögfüggvényeknek nevezzük, mivel értékük csak az α szögtől függ.

A szögfüggvények részletes tárgyalása helyett itt most csak a derékszögű háromszög belső szögei és oldalai közötti legfontosabb összefüggéseket foglaljuk össze.



10. ábra. Derékszögű háromszög a szögfüggvények magyarázatához

Mivel a háromszög belső szögeinek összege 180° ezért:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad \beta = 90^\circ - \alpha$$

A legfontosabb szögfüggvények:

$\sin \alpha = \frac{a}{c}$	=	$\frac{\text{Az } \alpha \text{ szöggel szemben fekvő befogó}}{\text{átfogó}}$
$\cos \alpha = \frac{b}{c}$	=	$\frac{\text{Az } \alpha \text{ szög mellett fekvő befogó}}{\text{átfogó}}$
$\tan \alpha = \frac{a}{b}$	=	$\frac{\text{Az } \alpha \text{ szöggel szemben fekvő befogó}}{\text{Az } \alpha \text{ szög mellett fekvő befogó}}$

Ugyanez a β szög esetén:

$$\begin{aligned}\sin \beta &= \frac{b}{c} \\ \cos \beta &= \frac{a}{c} \\ \tan \beta &= \frac{b}{a}\end{aligned}$$

A fenti képletekből további összefüggések következnek:

$$\begin{aligned}a &= c \cdot \sin \alpha = c \cdot \cos \beta = b \cdot \tan \alpha \\ b &= c \cdot \cos \alpha = c \cdot \sin \beta = a \cdot \tan \beta \\ c &= \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\cos \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\cos \beta}\end{aligned}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \cos \beta = \cos(90^\circ - \alpha) \\ \cos \alpha &= \sin \beta = \sin(90^\circ - \alpha) \\ \tan \alpha &= \frac{a}{b} = \frac{c \cdot \sin \alpha}{c \cdot \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\end{aligned}$$

A Pitagorasz-tételbe visszaírva **a** és **b** fenti értékeit:

$$\begin{aligned}c^2 \sin^2 \alpha + c^2 \cos^2 \alpha &= c^2 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1\end{aligned}$$

A szögfüggvények értékeit függvénytáblázatokból, kézikönyvekből vagy egyéb matematikai táblázatokból kaphatjuk meg, de napjainkban már az egyszerűbb számológépek sőt a mobiltelefonok egy része is tartalmazza a szögfüggvény funkciókat.

A szögfüggvények értékeinek megállapításakor ügyelnünk kell arra, hogy az α szög értékét milyen mértékegységben adjuk meg.

A gyakorlati számításokat a legtöbb esetben hagyományos fok (°) használatával végezzük. Ilyenkor a derékszöget (amikor a szög szárai merőlegesek) 90 részre osztják és ebből egy részt nevezünk 1°-nak.

Amikor a derékszöget 100 részre osztják, akkor ebből egy rész az úgynevezett új fok, amit viszonylag ritkán használunk.

Az SI mértékegység-rendszerben a **radián** a szög mértékegysége, ahol a derékszög $\pi/2$ értékű (kb.:1,5708).

1 radián hagyományos °-ra átszámítva: $90^\circ / 1,5708 \approx 57,2958^\circ$. Egy ekkora középponti szög alatt látható körív hossza éppen a körívhez tartozó sugár hosszával egyezik meg, a radián tehát a kör sugarával egyenlő hosszúságú körívhez tartozó középponti szög. A radián dimenzió nélküli, két hosszúság hányadosaként származtatott mértékegység.

Egy **R** sugarú kör valamely középponti szögének radiánban mért értéke egyenlő az adott középponti szöghöz tartozó körív hosszának (**s**) és a kör sugarának (**R**) a hányadosával ($\frac{s}{R}$).

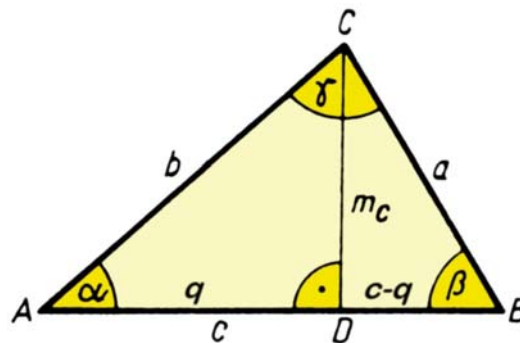
Azok a számológépek, melyek szögfüggvényeket is tudnak kezelni, általában mind a három szög mértékegységet ismerik, de hogy éppen melyik üzemmódban kéri a szög értékét, arra nekünk kell figyelniük. A kijelzőn mindig látható az aktuális üzemmód, ezek szinte minden számológépen azonos módon vannak feltüntetve:

Hagyományos fok (°) : **DEG**

Új fok: : **GRAD**

Radián: : **RAD**

3. Szinusztétel



11. ábra. Általános háromszög a szinusztétel és a koszinusztétel szemléltetéséhez

A 11. ábra alapján az m_c magasságvonalat kétféle módon is felírhatjuk:

Egyszer az **ACD** háromszögből:

$$m_c = b \cdot \sin \alpha$$

Másodszor a **BCD** háromszögből:

$$m_c = a \cdot \sin \beta$$

A kétféleképpen kiszámolt m_c hossz azonossága alapján:

$$b \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \beta$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

Ezt az összefüggést hasonló módon az általános háromszög bármely oldalpárjánál kimutathatjuk.

Szinusztétel:

Egy általános háromszögben bármely két oldal aránya egyenlő az oldalakkal szemben fekvő szögek szinuszeit arányával.

$$\begin{aligned} a : b : c &= \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \\ \frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \end{aligned}$$

4. Koszinusztétel

A 11. ábra alapján az m_c magasságvonal négyzetét kétféle módon is felírhatjuk a Pitagorasz-tétel segítségével.

Egyszer az **ACD** háromszögből:

$$m_c^2 = b^2 - q^2$$

Másodszor a **BCD** háromszögből:

$$m_c^2 = a^2 - (c - q)^2 = a^2 - c^2 + 2cq - q^2$$

A kétféle módszerrel számított m_c^2 értéknek egyenlőnek kell lennie:

$$b^2 - q^2 = a^2 - c^2 + 2cq - q^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq$$

Mivel $q = b \cdot \cos \alpha$ ezért:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

Ezt az összefüggést a fentiekhez hasonló módon az általános háromszög bármely oldalára levezethetjük.

Koszinusztétel:

Egy általános háromszög bármely oldalának négyzetét úgy kapjuk meg, hogy a másik két oldal négyzetének összegéből levonjuk ugyanannak a két oldalnak és az általuk közbezárt szög koszinuszának kétszeres szorzatát.

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \end{aligned}$$

Ha $\gamma = 90^\circ$ akkor a $2ab \cdot \cos \gamma$ tag értéke 0 lesz és így a Pitagorasz-tétel ismert képletét kapjuk, ezért a koszinusztételt a Pitagorasz-tétel általánosításának is tekinthetjük.

5. Százalékszámítás

A mindennapi életben, de a tudományos és a műszaki élet területein is gyakran használjuk a százalékszámítás különböző műveleteit. Maga a százalék fogalma teljesen azonos a századrész fogalmával ($1\% = \frac{1}{100} = 0,01$ rész), a százalékszámítás fogalomköre pedig a 100 nevezőjű törtekkel való számolást jelent.

A százalékszámításkor mindig 100 egyenlő részre osztunk valamilyen mennyiséget aminek keressük valahány századrészét, vagy más esetben egy mennyiségről meg akarjuk állapítani, hogy hány századrésze valaminek. Ez utóbbi eljárás sokszor szemléletesebben és általánosabban érzékelteti velünk valaminek a mértékét, mivel konkrét érték helyett arányokról beszélünk.

Például ha egy felmérés során megkérdezik **3825** embert valamiről és ebből **2448** igennel válaszolt egy bizonyos kérdésre, akkor a konkrét számok helyett érzékletesebb, ha azt halljuk, hogy a megkérdezettek **64%**-a válaszolt igennel.

A 100 nevezőjű törtekkel történő számolást százalékszámításnak nevezzük. A százalék jele a %, ami nem mértékegység, hanem a 100-zal osztásnak illetve a $\frac{\quad}{100}$ nevezőnek a szimbóluma.

$1\% = 1$ századrész $(\frac{1}{100}$ vagy $0,01)$

A százalékszámításhoz 3 alapfogalmat kell megjegyeznünk:

Százalékláb (p) (A példában: **p = 64**)

Alapérték (a) (A példában: **a = 3825**)

Százalékérték (sz) (A példában: **sz = 2448**)

A százalékszámítás során mindig a fenti három mennyiség valamelyikét keressük a másik kettő ismeretében.

A **százalékláb (p)** az a szám, amely megmutatja, hogy egy mennyiségnek hány századrészét, azaz hány százalékát kell kiszámolnunk.

Az **alapérték (a)** az a mennyiség, aminek a **p** századrészét, azaz **p%**-át kell kiszámolnunk.

Százalékértéknek (sz) nevezzük az alapérték **p** századrészét vagy **p%**-át.

A százaléklábat úgy számoljuk ki, hogy a százaléértéket szorozzuk 100-zal és osztjuk a alapértékekkel:

$$p = \frac{100 \cdot sz}{a}$$

Az alapértéket úgy számítjuk ki, hogy a százaléértéket szorozzuk 100-zal és osztjuk a százaléklábbal:

$$a = \frac{100 \cdot sz}{p}$$

A százaléértéket úgy számoljuk ki, hogy az alapértéket szorozzuk a százaléklábbal és osztjuk 100-zal:

$$sz = \frac{a \cdot p}{100}$$

Könnyebben megjegyezhető az alábbi összefüggés, melyből az egyenlet megfelelő rendezésével bármely értéket egyszerűen kiszámíthatjuk a másik kettő ismeretében:

$$100 \cdot sz = a \cdot p$$

(Tanulásiirányító 1. pont)

Összefoglalásként válasz a felvetett esetre:

Az esetfelvetésben vázolt feladat megoldása területszámításra vezethető vissza, ugyanis a színezőanyagok aránya meg fog egyezni a két különböző színű terület arányával.

Először rögzítsük a kiindulási adatokat:

A burkolólap oldalának hossza: $L = 40 \text{ cm}$

Az érintési pont harmadolja az oldalhosszt, tehát

$$a = \frac{2}{3} \cdot 40 = 26,67 \text{ cm}$$

$$b = \frac{1}{3} \cdot 40 = 13,33 \text{ cm}$$

A Pitagorasz-tétel alapján ki tudjuk számítani a belső négyzet területét:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 26,67^2 + 13,33^2 = 888,9 \text{ cm}^2$$

$$T_{\text{belső}} = 888,9 \text{ cm}^2$$

A burkolólap teljes területe és a belső négyzet területének különbsége adja a másik színű terület nagyságát:

$$T_{\text{külső}} = (40 \cdot 40) - 888,9 = 711,1 \text{ cm}^2$$

A két terület aránya: $\frac{T_{\text{belső}}}{T_{\text{külső}}} = \frac{888,9}{711,1} = 1,25$

Ez azt jelenti, hogy a belső négyzet színezéséhez 1,25-ször több színezőanyagot kell rendelni, mint a belső négyzeten kívüli területekéhez.

A két különböző színű terület akkor lenne egyenlő, ha $a = b$, ilyenkor a belső négyzet sarokpontjai a burkolólap oldalait az oldalfelező pontokban érintenék.

TANULÁSIRÁNYÍTÓ

1. Elemezze az alábbi honlapon olvasható cikket! Osztálytársaival, tanárával készítsenek táblázatot és grafikont a szövegben található különböző építőipari tevékenységek növekedését illetve csökkenését bemutató, százalékban kifejezett adatokról!

www.epulettar.hu/cikk/28142.aspx (2010.05.07)

ÖNELLENŐRZŐ FELADATOK

1. feladat

Keressen un. pitagoraszai szám-hármasokat, melyekre igaz az ismert összefüggés: $a^2 + b^2 = c^2$! Írásban rögzítse a szám-hármasokat a kijelölt helyre!

2. feladat

Ismertessen írásban egy gyakorlati példát a Pitagorasz-tétel alkalmazására!

3. feladat

Mivel foglalkozik a trigonometria és milyen idevágó tételeket ismer? Válaszát írja a kijelölt helyre!

MEGOLDÁSOK

1. feladat

$$a=3, b=4, c=5$$

$$a=5, b=12, c=13$$

$$a=7, b=24, c=25$$

2. feladat

Merőleges illetve derékszög kitűzése az $a=3$, $b=4$, $c=5$ pitagoraszai szám-hármas segítségével.

3. feladat

- A trigonometria a háromszögek ismert adataiból az ismeretlen adatok kiszámításához szükséges összefüggésekkel foglalkozik.
- Szinusztétel
- Koszinusztétel

SÍKIDOM, TEST, TÖMEG, SÚRÚSÉG

ESETFELVETÉS

Jelenleg egy műanyag termékeket gyártó cégnél dolgozik. Felkeresték a céget a Sziget-Fesztivál szervezői, műanyag útburkoló lapokat szeretnének rendelni. A szabadtéri fesztiválon az eső miatt kialakuló sártenger elkerülése érdekében ugyanis szabályos hatszög alakú műanyag lapokkal borítják az utakat.



12. ábra. Műanyag útburkoló lapok

Határozza meg azt, hogy hány darab burkolólapot kell gyártaniuk, ha a lefedni kívánt útfelület teljes hossza 5 km, és az út átlagos szélessége 10 m!

Egy műanyag lap oldalhossza 20 cm.

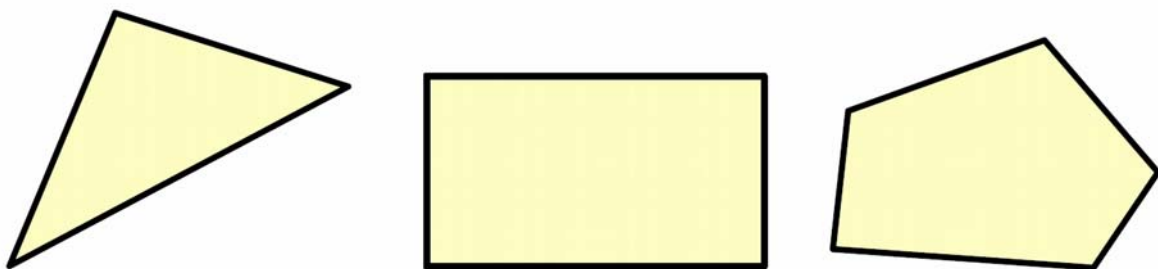
(A mintázat képéből látszik, hogy a lapok egymás mellé helyezésével egy fogazott szélű burkolt sáv alakítható ki, amit az **átlagos** útszélesség megadásával vettünk figyelembe.)

SZAKMAI INFORMÁCIÓTARTALOM

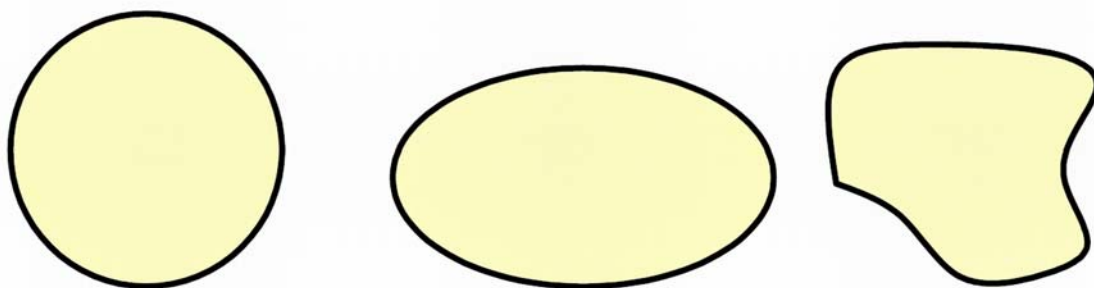
1. Síkidomok kerülete, területe

A síkidomok kétirányú kiterjedéssel rendelkező vastagság nélküli síkbeli alakzatok.

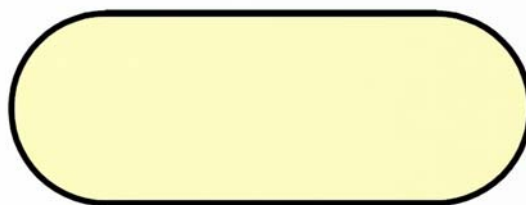
Kerületnek nevezzük egy síkidom határoló vonalát. A síkidom kerülete mindig egy önmagába visszatérő zárt görbe vagy vonallánc. A síkidomot határoló vonal állhat egyenesekből és síkgörbékből.



13. ábra. Egyenesekkel határolt síkidomok: háromszög, téglalap, szabálytalan sokszög



14. ábra. Síkgörbékkel határolt síkidomok: kör, ellipszis, szabálytalan alakú síkidom



15. ábra. Egyenesekkel és síkgörbékkel határolt síkidom: lóversenypálya alakú síkidom

A kerület nagyságának meghatározásakor a síkidomot határoló vonalat a hosszúság mértékegységgel hasonlítjuk össze, tehát a kerület mint mennyiség nem más, mint a síkidomot határoló vonal hossza.

A kerület jele: **K**

A kerület mértékegysége: **m** (mm, cm, dm, km...)

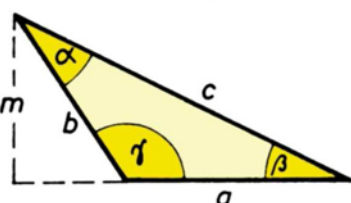
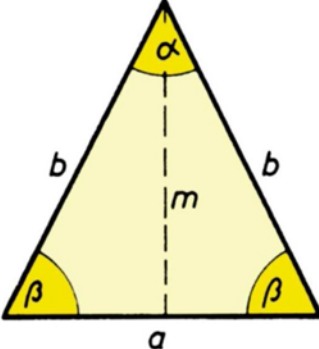
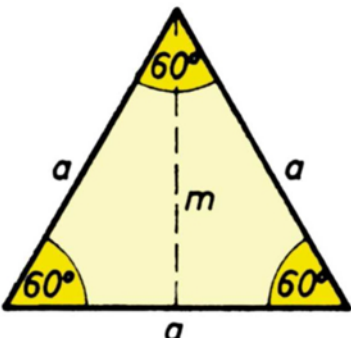
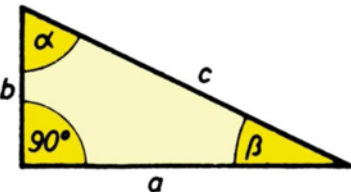
A kerület által behatárolt síkrészt nevezzük a síkidom területének.

A terület nagyságának meghatározásakor a síkidom területét a terület mértékegységgel hasonlítjuk össze.

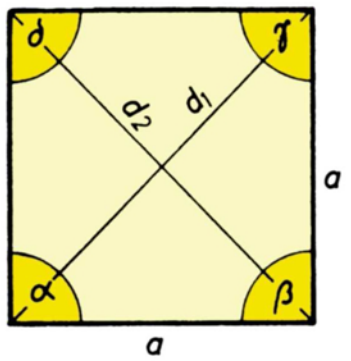
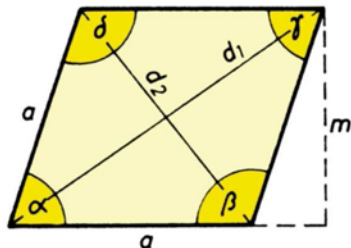
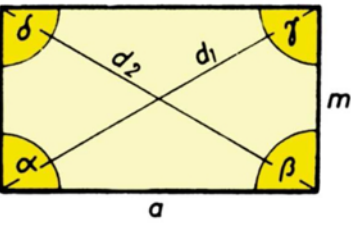
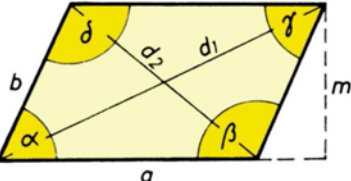
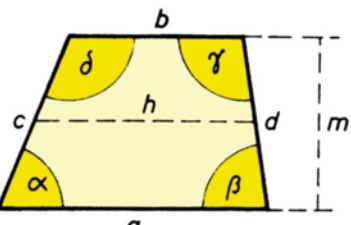
A terület jele: **A**

A terület mértékegysége: **m²** (mm², cm², dm², km²...)

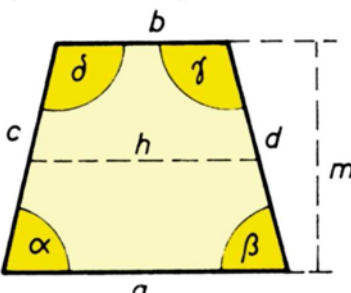
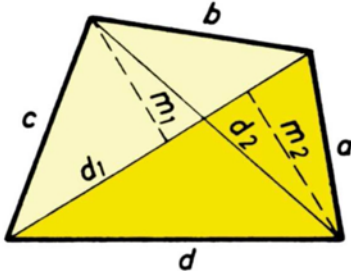
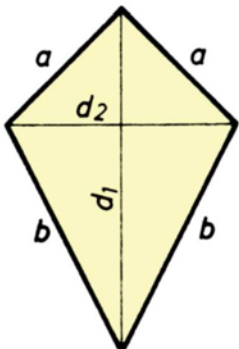
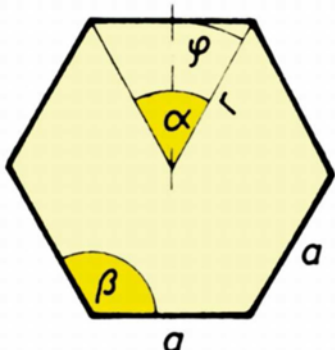
A műszaki gyakorlatban leggyakrabban előforduló síkidomok területét és kerületét az alábbi táblázatokban foglaljuk össze (16–20. ábra)

Megnevezés	Terület	Kerület	Jellemző összefüggés
<i>Általános háromszög</i> 	$A = \frac{am}{2}$	$K = a + b + c$	$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
<i>Egyenlő szárú háromszög</i> 	$A = \frac{am}{2}$	$K = a + 2b$	$m = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$
<i>Egyenlő oldalú háromszög</i> 	$A = \frac{am}{2}$	$K = 3a$	$m = \frac{a}{2}\sqrt{3}$
<i>Derékszögű háromszög</i> 	$A = \frac{ab}{2}$	$K = a + b + c$	$c^2 = a^2 + b^2$

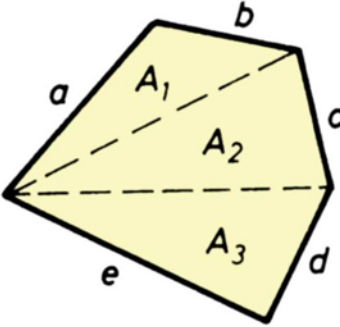
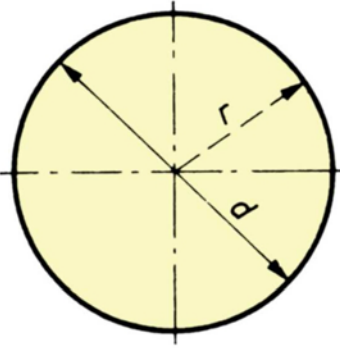
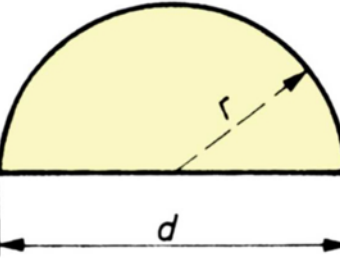
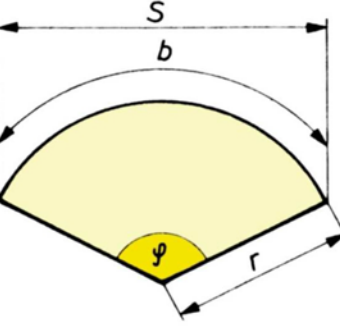
16. ábra. Síkidomok területe és kerülete – I.

Megnevezés	Terület	Kerület	Jellemző összefüggés
<i>Négyzet</i> 	$A = a^2$	$K = 4a$	$d_1 = d_2 = a\sqrt{2}$ $d_1 \perp d_2$ $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^\circ$
<i>Rombusz</i> 	$A = am = \frac{1}{2}d_1d_2$	$K = 4a$	$d_1 \neq d_2$ $d_1 \perp d_2$ $\alpha = \gamma$ $\beta = \delta$ $\alpha + \beta = 180^\circ$ $m = a \sin \alpha$
<i>Téglalap</i> 	$A = am$	$K = 2a + 2m$	$d_1 = d_2 = \sqrt{a^2 + m^2}$ $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^\circ$
<i>Paralelogramma</i> 	$A = am$	$K = 2a + 2b$	$d_1 \neq d_2$ $\alpha = \gamma$ $\beta = \delta$ $\alpha + \beta = 180^\circ$ $m = b \sin \alpha$
<i>Trapéz</i> 	$A = \frac{a+b}{2}m = hm$	$K = a + b + c + d$	$h = \frac{a+b}{2}$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta$ $\alpha + \delta = 180^\circ$ $\beta + \gamma = 180^\circ$ $m = c \sin \alpha$

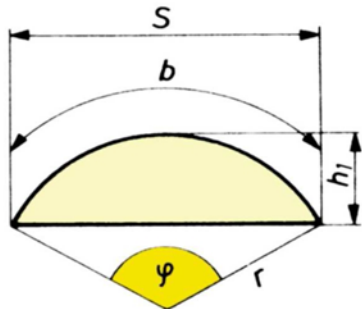
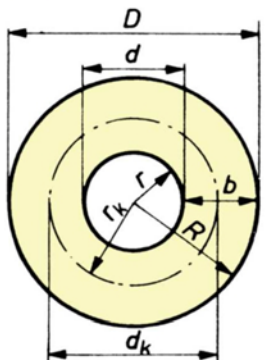
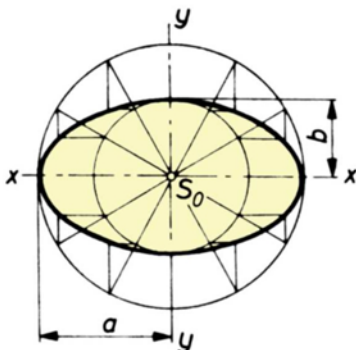
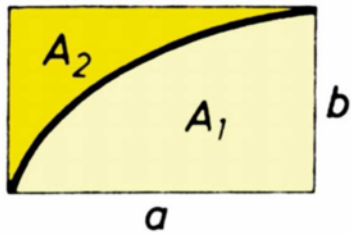
17. ábra. Síkidomok területe és kerülete – II.

Megnevezés	Terület	Kerület	Jellemző összefüggés
<i>Egyenlő szárú trapéz</i> 	$A = \frac{a+b}{2} m = hm$	$K = a + b + 2c$	$h = \frac{a+b}{2}$ $c = d$ $\alpha = \beta$ $\gamma = \delta$ $\alpha + \delta = 180^\circ$ $m = c \sin \alpha$
<i>Általános négyszög</i> 	$A = \frac{d_1}{2} (m_1 + m_2)$	$K = a + b + c + d$	$a \neq b \neq c \neq d$
<i>Deltoid</i> 	$A = \frac{1}{2} d_1 d_2$	$K = 2a + 2b$	$d_1 \perp d_2$
<i>Szabályos sokszög (pl.: n=6)</i> 	$A = nr^2 \sin \varphi \cos \varphi$	$K = na$	n az oldalak száma r a sokszög köré írható kör sugara $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$ $\varphi = \frac{\alpha}{2} = \frac{180^\circ}{n}$ $\beta = 180^\circ - \alpha$ $a = 2r \sin \varphi$

18. ábra. Síkidomok területe és kerülete – III.

Megnevezés	Terület	Kerület	Jellemző összefüggés
Általános sokszög (pl.: $n=5$) 	$A = A_1 + A_2 + A_3$	$K = a + b + c + d + e$	n az oldalak száma
Kör 	$A = r^2 \pi = \frac{d^2}{4} \pi$	$K = 2r\pi = d\pi$	$d = 2r$
Félkör 	$A = \frac{r^2}{2} \pi = \frac{d^2}{8} \pi$	$K = r(2 + \pi) = d \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$	$d = 2r$
Körcikk 	$A = \frac{r^2 \pi}{360^\circ} \varphi = \frac{br}{2}$	$K = 2r + b$	φ középponti szög ° (fok)-ban $b = \frac{r\pi}{180^\circ} \varphi$ $S = 2r \sin \frac{\varphi}{2}$

19. ábra. Síkidomok területe és kerülete – IV.

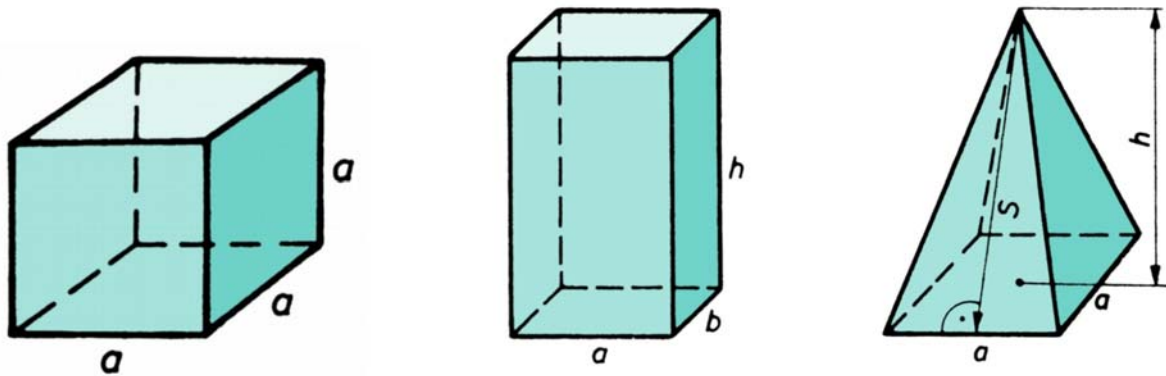
Megnevezés	Terület	Kerület	Jellemző összefüggés
Körszelet 	$A = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi\varphi}{180^\circ} - \sin \varphi \right)$	$K = S + b$	φ középponti szög ° (fok)-ban $b = \frac{r\pi}{180^\circ} \varphi$ $S = 2r \sin \frac{\varphi}{2}$ $h_1 = r \left(1 - \cos \frac{\varphi}{2} \right)$
Körgyűrű 	$A = (R^2 - r^2)\pi$ $A = (D^2 - d^2)\frac{\pi}{4}$ $A = d_k b \pi$	$K = 2\pi(R + r)$ $K = \pi(D + d)$	$r_k = \frac{1}{2}(R + r)$ $d_k = \frac{1}{2}(D + d)$ $b = \frac{1}{2}(D - d)$
Ellipszis 	$A = ab\pi$	Durva közelítés: $K \approx (a + b)\pi$ Pontosabbak: $K \approx 4 \frac{ab\pi + (a - b)^2}{(a + b)}$ $K \approx \pi \left(\frac{3}{2}(a + b) - \sqrt{ab} \right)$	A kerület számítására csak közelítő formulák vannak
Parabola 	$A_1 = \frac{2}{3}ab$ $A_2 = \frac{1}{3}ab$	$K = a + b + s$	s a parabolaív hossza $s \approx a + \frac{2b^2}{3a}$

20. ábra. Síkidomok területe és kerülete – V.

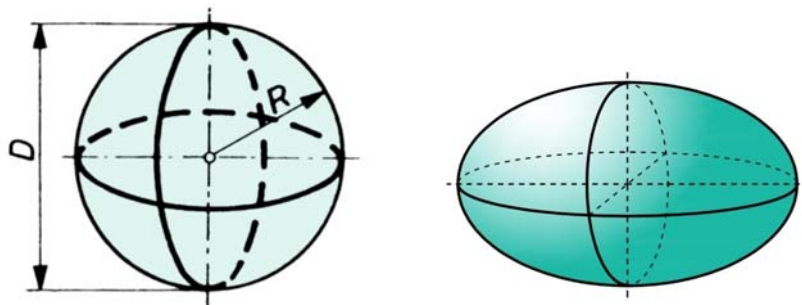
2. Testek felszíne és térfogata

A geometriai testek három irányú kiterjedéssel rendelkező térbeli alakzatok.

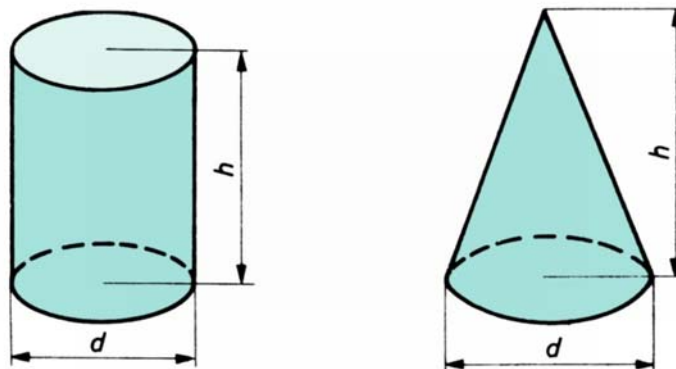
A geometriai testeket vastagság nélküli felületek határolják. Ezek a felületek lehetnek síkidomok és görbült felületek.



21. ábra. Síkidomokkal határolt testek: kocka, téglatest, gúla



22. ábra. Görbült felülettel határolt testek: gömb, ellipszoid



23. ábra. Síkidomokkal és görbült felülettel határolt testek: körhenger, kúp

Egy test felszínének nevezzük a testet határoló felületek összességét.

Egy test felszínének nagyságát úgy határozzuk meg, hogy a határoló felületek területeit összeadjuk.

A felszín jele: A_s

A felszín mértékegysége: m^2 (mm^2 , cm^2 , dm^2 , km^2 ...)

Egy test térfogatának nevezzük a test határoló felületei által bezárt térrészt.

A térfogat nagyságának meghatározásakor ezt a térrészt hasonlítjuk össze a térfogat mértékegységgel.

A térfogat jele: V

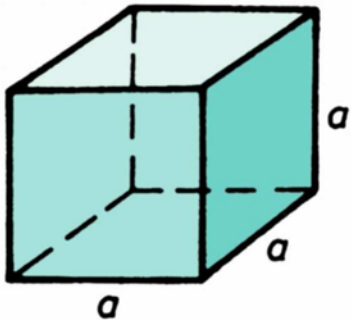
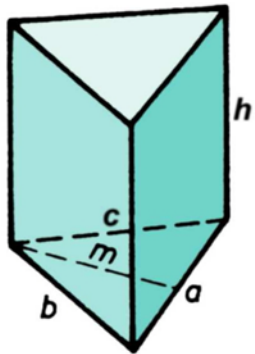
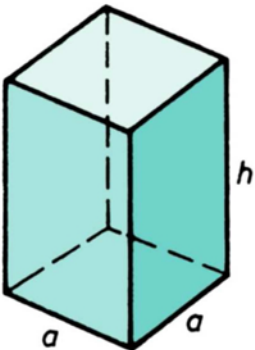
A térfogat mértékegysége: m^3 (mm^3 , cm^3 , dm^3 , km^3 ...)

A térfogatot folyadékok esetén illetve folyadékok vagy gázok tárolásához használt edények és tartályok esetén űrtartalomnak is szokták nevezni. Az űrtartalom a térfogattal azonos jellegű mennyiség, külön mértékegysége is van, a liter (l).

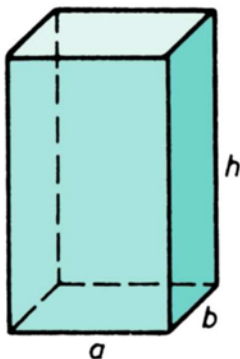
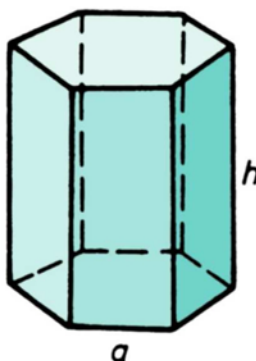
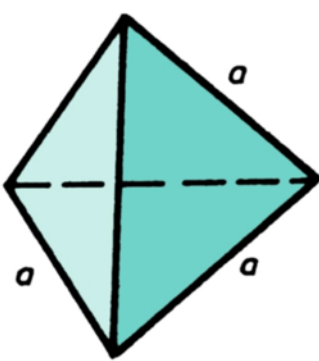
$$1 m^3 = 1000 l$$

$$1 dm^3 = 1 l$$

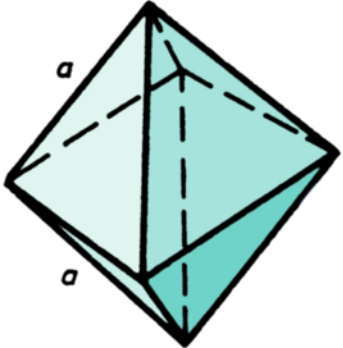
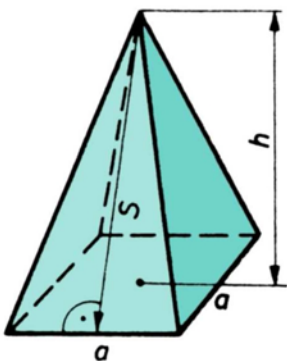
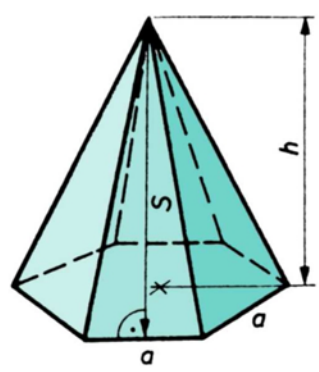
A műszaki gyakorlatban leggyakrabban előforduló geometriai testek térfogatát és felszínét az alábbi táblázatokban foglaljuk össze (24–30. ábra)

Megnevezés	Térfogat	Felszín
<i>Kocka</i> 	$V = a^3$	$A_s = 6a^2$
<i>Háromszög alapú hasáb</i> 	$V = \frac{1}{2} amh$	$A_s = am + (a + b + c)h$
<i>Négyzet alapú hasáb</i> 	$V = a^2 h$	$A_s = 2a^2 + 4ah$

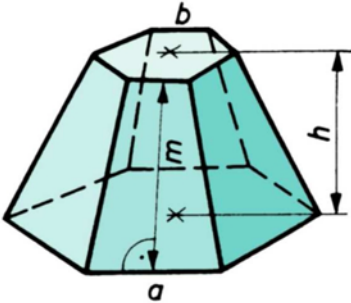
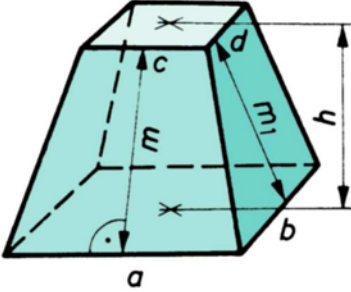
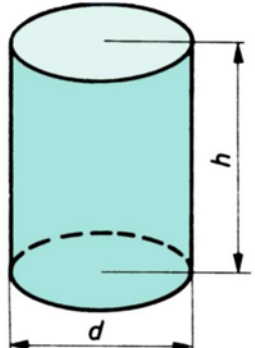
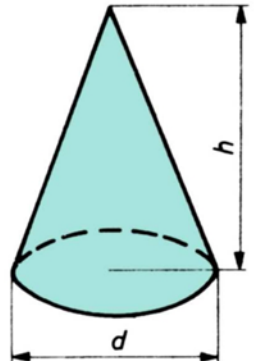
24. ábra. Testek térfogata és felszíne – I.

Megnevezés	Térfogat	Felszín
<i>Téglalap alapú hasáb</i> 	$V = abh$	$A_s = 2(ab + ah + bh)$
<i>Szabályos hatszög alapú hasáb</i> 	$V = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 h$	$A_s = 6ah + 3\sqrt{3} a^2$
<i>Szabályos tetraéder</i> 	$V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$	$A_s = \sqrt{3} a^2$

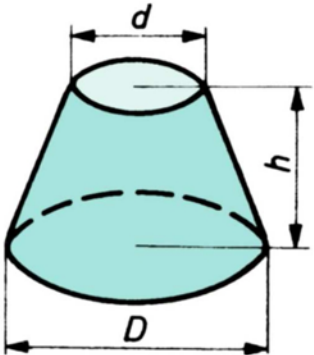
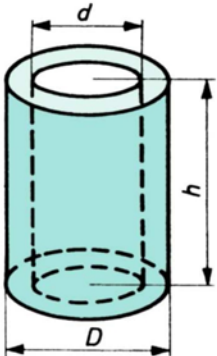
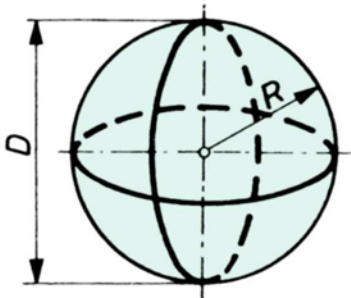
25. ábra. Testek térfogata és felszíne – II.

Megnevezés	Térfogat	Felszín
<i>Szabályos oktaéder</i> 	$V = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3$	$A_s = 2\sqrt{3} a^2$
<i>Négyzet alapú gúla</i> 	$V = \frac{a^2 h}{3}$	$s = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}$ $A_s = a^2 + 2as$
<i>Szabályos sokszög alapú gúla</i> 	$V = \frac{A_a h}{3}$	A_a az alapterület n az oldalak száma $A_s = A_a + \frac{nas}{2}$

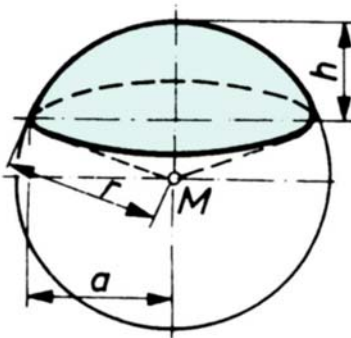
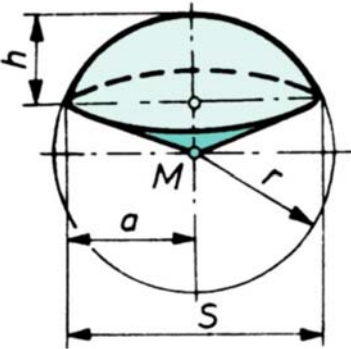
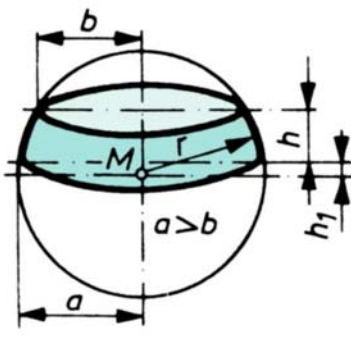
26. ábra. Testek térfogata és felszíne – III.

Megnevezés	Térfogat	Felszín
<i>Szabályos sokszög alapú csonkagúla</i> 	$V = \frac{h}{3} (A_a + A_f + \sqrt{A_a A_f})$	A_a az alapterület A_f a fedőlap területe n az oldalak száma m az oldallapok magassága $A_s = A_a + A_f + nm \frac{a+b}{2}$
<i>Téglalap alapú csonkagúla</i> 	$V = \frac{h}{6} [(2a+c)b + (2c+a)d]$	$A_s = ab + cd + m(a+c) + m_1(b+d)$
<i>Körhenger</i> 	$V = \frac{d^2 \pi}{4} h$	$A_s = \frac{d^2 \pi}{2} + hd\pi$
<i>Körkúp</i> 	$V = \frac{d^2 \pi h}{12}$	s a kúp alkotója $s = \sqrt{h^2 + \frac{d^2}{4}}$ $A_s = \frac{d^2 \pi}{4} + \frac{sd\pi}{2}$

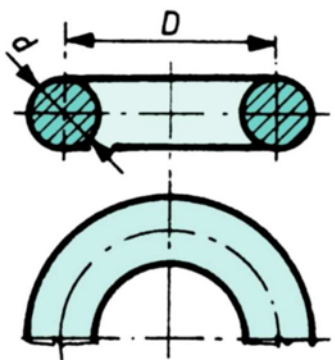
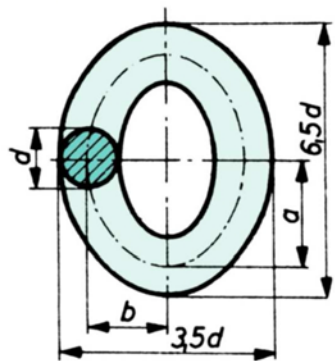
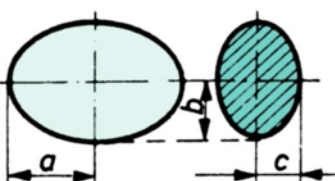
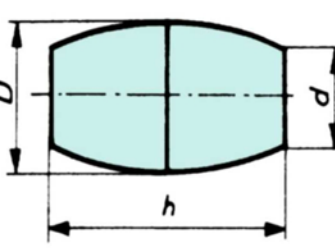
27. ábra. Testek térfogata és felszíne – IV.

Megnevezés	Térfogat	Felszín
<i>Csonka körkúp</i> 	$V = \frac{\pi h}{12} (D^2 + Dd + d^2)$	<i>s a kúp alkotója</i> $s = \sqrt{h^2 + \frac{(D-d)^2}{4}}$ $A_s = \frac{D^2 + d^2}{4} \pi + \frac{D+d}{2} s \pi$
<i>Körhenger cső</i> 	$V = \frac{h}{4} (D^2 - d^2) \pi$	$A_s = \frac{\pi}{2} (D^2 - d^2) + \pi h (D + d)$
<i>Gömb</i> 	$V = \frac{4}{3} R^3 \pi = \frac{1}{6} D^3 \pi$	$A_s = 4 R^2 \pi = D^2 \pi$

28. ábra. Testek térfogata és felszíne – V.

Megnevezés	Térfogat	Felszín
<i>Gömbszüveg</i> 	$a = \sqrt{h(2r - h)}$ $V = \frac{h}{6} \pi (3a^2 + h^2)$ $V = \frac{h^2}{3} \pi (3r - h)$	$A_s = \pi (2rh + a^2)$ $A_s = \pi h (4r - h)$
<i>Gömbcikk</i> 	$V = \frac{2}{3} \pi r^2 h$	$a = \sqrt{h(2r - h)}$ $A_s = r \pi (2h + a)$
<i>Gömbszelet</i> 	$V = \frac{1}{6} \pi h (3a^2 + 3b^2 + h^2)$	$A_s = \pi (a^2 + b^2 + 2rh)$

29. ábra. Testek térfogata és felszíne – VI.

Megnevezés	Térfogat	Felszín
<i>Körkeresztmetszetű körgyűrű</i> 	$V = \frac{Dd^2}{4}\pi^2$	$A_s = Dd\pi^2$
<i>Körkeresztmetszetű elliptikus láncszem</i> 	$V \approx \frac{a+b}{4}d^2\pi^2$	$A_s \approx d(a+b)\pi^2$
<i>Ellipszoid</i> 	$V = \frac{4}{3}abc\pi$	<i>Nincs egyszerű képlet</i>
<i>Hordó</i> 	<i>Ha a meridiángörbe másodfokú parabola:</i> $V = \frac{\pi h}{15} \left(2D^2 + Dd + \frac{3}{4}d^2 \right)$ <i>Ha a meridiángörbe kör:</i> $V \approx \frac{\pi h}{12} (2D^2 + d^2)$	<i>Nincs egyszerű képlet</i>

30. ábra. Testek térfogata és felszíne – VII.

3. Tömeg, sűrűség, testsűrűség

A tömeg a fizikai testben lévő anyag mennyiségét méri. A testek tömege állandó, ami azt jelenti, hogy egy test tömege nem függ a test környezetétől, mindegy hogy azt milyen közegbe vagy gravitációs térbe helyezzük. A testekre a gravitációs térben erő hat, ezt az erőt nevezzük a testek súlyának. Egy test súlya a test tömegének és a gravitációra jellemző gyorsulásnak a szorzatából számítható:

$$G = m \cdot g$$

ahol **G** a test súlya, **m** a tömege és **g** a gravitációs térre jellemző nehézségi gyorsulás.

Látható, hogy a súly a **g** értékétől függően változhat, tehát nem állandó érték. A **g** értéke égitestenként más és más. Ugyanakkora tömegű test súlya a Holdon kisebb mint a Földön, mivel a Hold gravitációs tere gyengébb mind a Földé. A **g** értéke a Földön sem teljesen azonos mindenhol (Magyarországon pl.: $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$), de a földfelszín közelében nagyjából az egész bolygón ugyanakkorának tekinthető.

A gyakorlati számításokban megengedett közelítés a $g = 10 \frac{m}{s^2}$. Az ebből származó hiba elhanyagolhatóan csekély, viszont lényegesen egyszerűbbé teszi a számítást.

A 10-zel való szorzásnak a következménye, hogy a tömeg és a súly számértékének alakja nagyon hasonló lesz, ennek következtében alakulhatott ki az a hibás gyakorlat, hogy a tömeg és a súly fogalmát valamint azok mértékegységeit a hétköznapi életben rendszeresen összekeverik.

A tömeg mértékegysége az **SI** rendszerben: **kg**

A súly mértékegysége az **SI** rendszerben: **N (newton)**

Az **1 kg** tömegű test súlya **~10 N** (a Földön).

Ha egy homogén tömör test tömege **m**, térfogata pedig **V**, akkor a test anyagának a sűrűségét

$$\rho = \frac{m}{V}$$

összefüggésből számíthatjuk ki.

A sűrűség más szóval az egységnyi térfogatú anyag tömegét jelenti.

Származtatott mértékegysége a $\frac{kg}{m^3}$.

Abban az esetben ha az anyag nem tömör, hanem lyukacsos, és a test m tömegét a test belső üregekkel együtt mért térfogatával osztjuk, akkor a testsűrűséget kapjuk.

$$\rho_t = \frac{m}{V_t}$$

A teljesen tömör anyag esetén a testsűrűség egyenlő a sűrűséggel ($\rho_t = \rho$). Lyukacsos, porózus anyag esetén a testsűrűség mindig kisebb mint a sűrűség ($\rho_t < \rho$).

A testsűrűség és a sűrűség hányadosa a tömörség, ami mindig egy 1-nél kisebb szám. A teljesen üreg és hézagmentes anyag tömörsége 1-gyel egyenlő.

Összefoglalásként válasz a felvetett esetre:

Az esetfelvetésben vázolt feladat megoldása területszámítási feladatokra vezethető vissza.

Először rögzítsük a feladat kiinduló adatait!

A burkolni kívánt út hossza: $L = 5 \text{ km} = 5000 \text{ m}$

Az út szélessége: $S = 10 \text{ m}$

A szabályos hatszög alakú burkolóelemek oldalhossza: $a = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$

A számítás során méterben dolgozunk.

A lefedni kívánt terület: $T = 5000 \cdot 10 = 50\,000 \text{ m}^2$

A burkolólap szabályos hatszög alakú, amit 6 db egyenlőoldalú háromszög alkot. Az egyenlőoldalú háromszögek oldalhossza azonos a szabályos hatszög oldalhosszával, tehát 0,2 m. A szabályos hatszög területét ezután 6 darab $a = 0,2 \text{ m}$ oldalhosszúságú egyenlőoldalú háromszög területeként határozhatjuk meg. Az egyenlőoldalú háromszög területének képletét pl. a 16. ábrán is megtaláljuk. Ezt felhasználva a szabályos hatszög területe a következő:

$$A = 6 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = 6 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot \sqrt{3} = 0,1039 \text{ m}^2$$

A darabszámot úgy kapjuk meg, hogy a lefedni kívánt területet osztjuk a burkolólap területével:

$$n = \frac{50000}{0,1039} = 481232 \text{ db}$$

A szükséges burkolólap mennyiség: **481 232 db.**

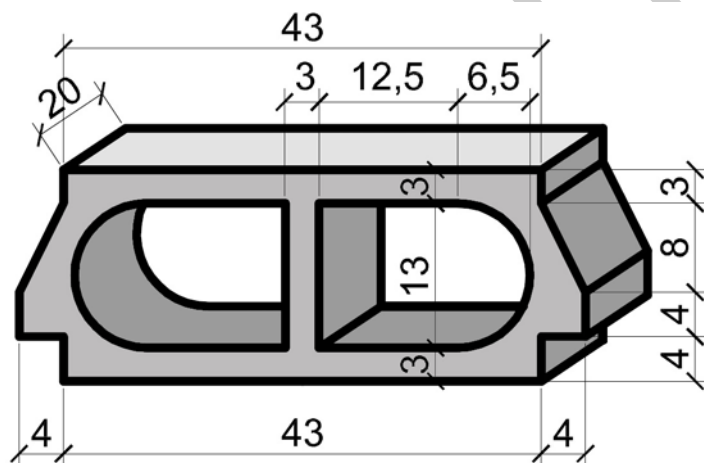
ÖNELLENŐRZŐ FELADATOK

1. feladat

Ön egy betonelemgyár gyártáselőkészítő osztályának munkatársa és feladata a 31. ábrán látható beton földémbéleltest betonszükségletének meghatározása.

Kérlek Öntől továbbá, hogy számítsa ki a már megszilárdult betonelem tömegét is. Megadták, hogy a gyártáshoz használt beton testsűrűsége szilárdulás után $\rho_t = 2200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Határozza meg, hogy 1 m^3 frissbeton hány beton béleltest gyártásához elegendő, ha a gyártás során 11%-os frissbeton veszteséggel kell számolni!



31. ábra. Beton földémbéleltest méretei cm-ben

2. feladat

Ön egy betonkeverő telep munkatársa és azt a feladatot kapja, hogy készítsen 5 tonna frissbetont a következő keverési tömegarányok szerint:

- adott minőségű cement: **14%**
- víz: **7%**
- adott szemszerkezetű homokos kavics adalék: **79%**

Milyen mennyiségeket rendel az egyes alkotórészekből?

Határozza meg, hogy az 5 tonna frissbeton hány m^3 betonszerkezet készítéséhez elegendő, ha az adott beton szilárdulás utáni testsűrűsége $\rho_t = 2250 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$!

3. feladat

Válaszoljon az alábbi kérdésekre!

Melyik nagyobb? Egy d oldalú négyzet területe vagy egy d átmérőjű kör területe? A kisebb terület hány százaléka a nagyobb területnek?

4. feladat

Mérés és számítás nélkül becsülje meg egy raktárban talált körhenger alakú hordó térfogatát! A hordó ránézésre kb. 1 m magas és fél méter átmérőjű.

Becsülje meg a teli hordó tömegét, ha a hordó színültig van gázolajjal!

5. feladat

Az alábbi összetett feladatot kell megoldania:

Ön egy építési faanyagok forgalmazásával és gyártásával foglalkozó fűrésztelep alkalmazottja. Megrendelést kapnak egy jelentősebb tétel 6 m hosszúságú 24 cm magas 16 cm széles téglalap keresztmetszetű fűrészelt fenyőfa gerendára, de ez a méret éppen nincs raktáron.

Meg kell oldani a kért termék előállítását! Állapítsa meg azt a kör keresztmetszetű rönkfa átmérőt, amiből a kért gerenda leszabható!

6. feladat

További részfeladatok kapcsolódnak az 5. feladathoz.

Az alábbiakat kell elvégeznie:

a) Az 5. feladatban kapott átmérő ismeretében Ön megrendelte a kör keresztmetszetű rönkfát, de azt a választ kapta, hogy csak olyan faanyagot tudnak szállítani ebben a hosszban, amelyiknek az egyik végén az átmérő 32 cm és ez a rönk hossza mentén folyamatosan vastagodva a rönkfa másik végén már 38 cm.

Számítsa ki, hogy ebből a nyersanyagból legyártva a kért gerendát, hány %-os lesz a veszteség gerendánként!

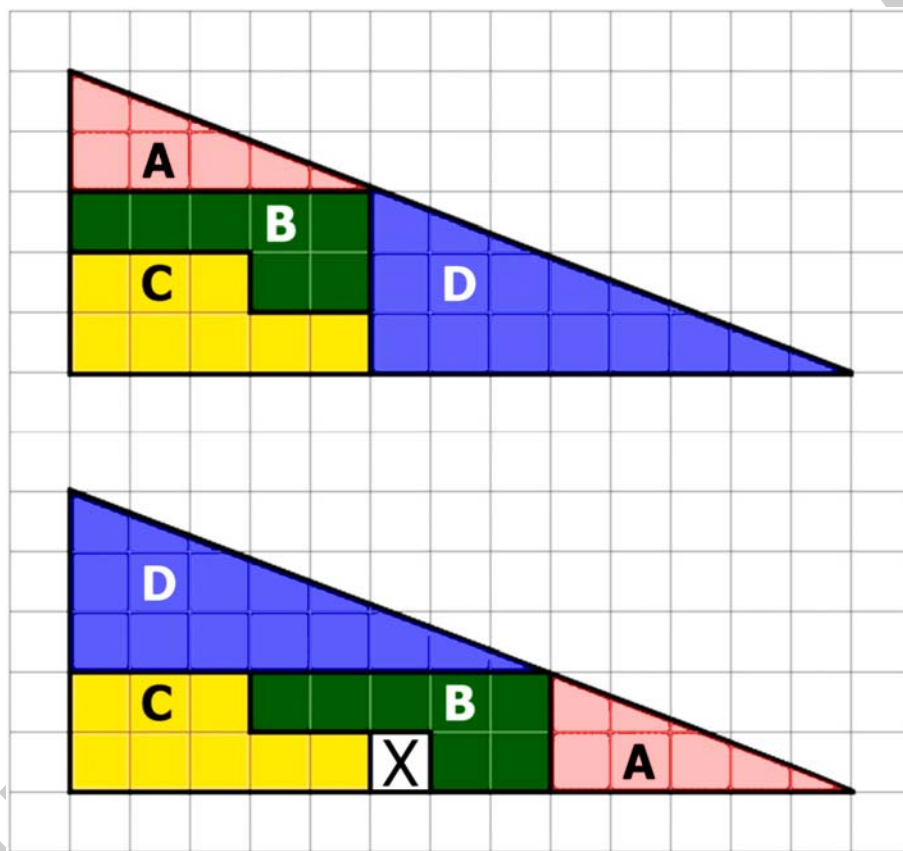
b) Tegyen javaslatot a veszteség hasznosítására!

c) Döntse el, a kész gerendát meg tudja-e emelni két férfi dolgozó, ha egy felnőtt férfi maximum 50 kg tömeget emelhet! (Munkavédelmi előírás!)

7. feladat

Trükkös háromszögek.

Az alábbi ábrán ugyanabból a 4 db síkidomból (A, B, C, D) kétféle elrendezésben kiraktunk két azonos méretűnek és alakúnak tűnő derékszögű háromszöget. A két háromszög területének meg kellene egyeznie, az alsó háromszögből mégis hiányzik egy egységnyi oldalú négyzet (X-szel jelöltük). Mi lehet az oka?



32. ábra Trükkös háromszögek

MEGOLDÁSOK

1. feladat

A feladat végső soron egy egyenes hasáb térfogatának a kiszámítása, ahol a hasáb alapja egy viszonylag bonyolultabb síkidom.

Egy összetett síkidom területét lehetőleg a legkevesebb számítási művelettel kell meghatározni, hogy a számítási hiba lehetősége ezzel is csökkenjen.

Az ábráról rögtön megállapíthatjuk, hogy az összetett síkidom szimmetrikus, ezért elegendő csak a fél területet meghatároznunk, amit a végén majd 2-vel szorzunk.

Az alábbi ábrán a vizsgált alakzatot egyszerű geometriai formákra bontottuk, melyek mindegyikének külön-külön könnyen meg tudjuk határozni a területét.

Praktikus fogásnak látszik a tömör területből levonni az üreg területét, mivel így kevesebb művelettel egy áttekinthetőbb számítást tudunk készíteni.

A részekre bontás során 5 egyszerű síkidomot kaptunk:

2 téglalap: A_1, A_4

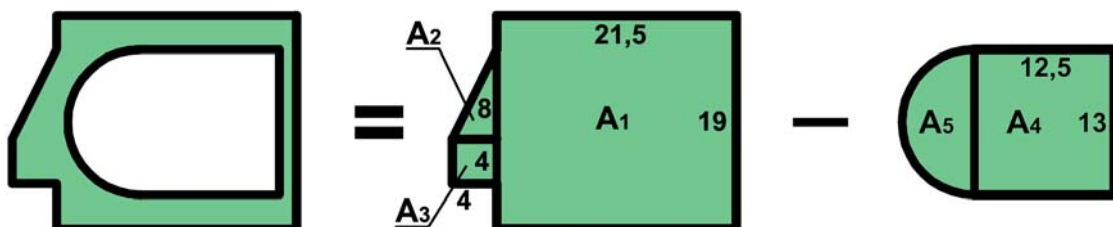
1 derékszögű háromszög: A_2

1 négyzet: A_3

1 félkör: A_5

A keresett teljes területet (A_t) ezek után az alábbi összefüggésből számíthatjuk:

$$A_t = 2 \cdot [(A_1 + A_2 + A_3) - (A_4 + A_5)]$$



33. ábra. Terület részekre bontása

A számítást célszerű táblázatos formában elvégezni, ami az ellenőrzést is nagyban segíti.

Síkidomok	Méretek cm-ben	Területek cm ² -ben
A_1	21,5 x 19	$21,5 \cdot 19 = 408,50$
A_2	8 x 4	$(8 \cdot 4) \cdot 0,5 = 16$
A_3	4 x 4	$4 \cdot 4 = 16$
A_4	12,5 x 13	$12,5 \cdot 13 = 162,50$
A_5	R = 6,5	$6,5^2 \cdot \pi \cdot 0,5 = 66,37$
$B_1 = A_1 + A_2 + A_3$		$408,50 + 16 + 16 = 440,50$
$B_2 = A_4 + A_5$		$162,50 + 66,37 = 228,87$
$A_t = 2(B_1 - B_2)$		$2 \cdot (440,50 - 228,87) = 423,26$

34. ábra. Számítási táblázat

A síkidom teljes területe: $A_t = 423,26 \text{ cm}^2$

Az egyenes hasáb magassága: $h_t = 20 \text{ cm}$

A térfogatot az alapterület (A_t) és a hasáb magasságának (h_t) a szorzata adja:

$$V_t = A_t \cdot h_t$$

$$V_t = 423,26 \cdot 20 = 8465,2 \text{ cm}^3 = 8,465 \text{ dm}^3 = 0,008465 \text{ m}^3$$

$$V_t = 0,008465 \text{ m}^3$$

A betonelem tömegét a térfogat (V_t) és a testsűrűség (ρ_t) szorzata adja:

$$m_t = 0,008465 \text{ m}^3 \cdot 2200 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 18,62 \text{ kg}$$

A gyártás során 11%-os a frissbeton veszteség, ezért 1 m³ helyett annak csak 89%-ával számolhatunk:

$$V_b = 1000 \text{ dm}^3 \cdot 0,89 = 890 \text{ dm}^3$$

Az ebből gyártható darabszám:

$$n = \frac{V_b}{V_t} = \frac{890}{8,465} = 105,14$$

ami egészekre kerekítve **105 db**.

2. feladat

A végleges keverék tömege: $5 \text{ t} = 5000 \text{ kg}$

cement: $(5000 \cdot 14) : 100 = 700 \text{ kg}$

víz: $(5000 \cdot 7) : 100 = 350 \text{ kg}$

h.kavics: $(5000 \cdot 79) : 100 = 3950 \text{ kg}$

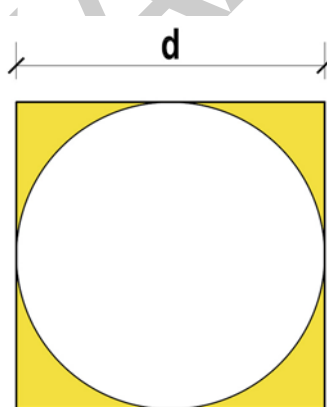
Ez összesen: $700 + 350 + 3950 = 5000 \text{ kg}$

Ebből $m_b = 5000 - 350 = 4650 \text{ kg}$ tömegű szilárd beton lesz, mivel a víz tömegét szilárdulás után már nem kell figyelembe venni.

Ha a megszilárdult beton testsűrűsége $\rho_t = 2250 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, akkor az 5 t friss betonból

$V_b = \frac{m_b}{\rho_t} = \frac{4650}{2250} = 2,07 \text{ m}^3$ betonszerkezet készíthető, feltételezve, hogy a betonozás során nincs frissbeton veszteség.

3. feladat



35. ábra. Szemléltető ábra a 3. feladathoz

Természetesen a d oldalú négyzet területe nagyobb, hiszen egy d oldalú négyzetbe beleírható a d átmérőjű kör.

Számítással:

$$T_{\text{négysz}} = d^2$$

$$T_{\text{kör}} = \frac{d^2 \pi}{4} = 0,7854 \cdot d^2 = 0,7854 \cdot T_{\text{négysz}}$$

$$\text{Tehát } T_{\text{négysz}} > T_{\text{kör}}$$

Hány %-a a kör területe a négyzet területének?

$$p = ?$$

$$a = T_{\text{négysz}}$$

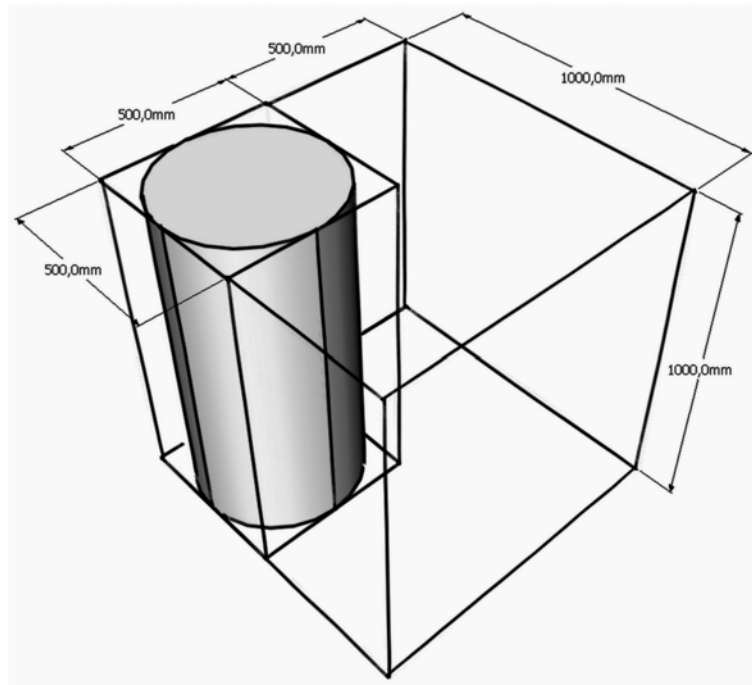
$$sz = T_{\text{kör}} = 0,7854 \cdot T_{\text{négysz}}$$

$$p = \frac{100 \cdot sz}{a} = 100 \frac{0,7854 \cdot T_{\text{négysz}}}{T_{\text{négysz}}} = 100 \cdot 0,7854 = 78,54\%$$

A kör területe **78,54%**-a a köré írható négyzet területének.

A számítás eredményét érdemes úgy megjegyezni, hogy egy kör területe nagyjából 80%-a a köré írt négyzet területének. Ennek gyakran hasznát vehetjük a gyakorlatban, gyors közelítő számítások alkalmával.

4. feladat



36. ábra. Szemléltető ábra a 4. feladathoz

Ha a hordó ránézésre kb. 1 m magas és fél méter átmérőjű, akkor első közelítésben gondoljunk arra, hogy ha a hordó alakja fél méter oldalhosszúságú négyzet alapú hasáb lenne, akkor a térfogata éppen negyed m^3 lenne, ami 250 litert jelent. A 3. feladatban azonban láttuk, hogy a kör területe csak kb. 80%-a a köré írható négyzet területének, ezért a 250 liter helyett annak csak a 80%-ával számolhatunk, ami 200 litert jelent. (A térfogatot a körhengernél és a négyzetes hasábnál is az alapterület és a magasság szorzata adja, a magasság viszont mindkét esetben ugyanakkora, ezért egyezik a térfogatok aránya az alapterületek arányával.)

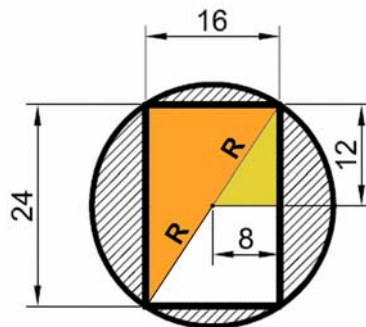
Ha a hordóban víz lenne akkor a víz tömege 200 kg lenne, a gázolaj azonban könnyebb mint a víz, a sűrűsége kb. 90%-a a víz sűrűségének, így a hordóban lévő olaj tömege a 200 kg-nak a 90%-a, ami 180 kg.

Az üres hordó tömegét is figyelembe véve (10–15 kg) a teli hordó teljes tömege 190–195 kg körül lehet.

A fenti gondolatmenetet a 36. ábra szemlélteti.

5. feladat

Ha nem áll rendelkezésünkre tervrajz akkor magunknak kell készítenünk egy olyan ábrát, ami segít megérteni a feladatot. (37. ábra)

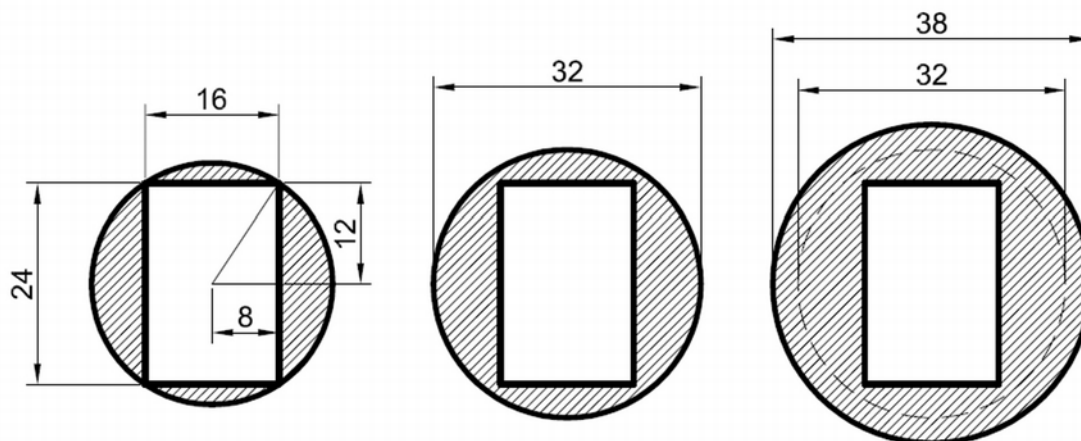


37. ábra. Rönkfa átmérő meghatározása (méretetek cm-ben)

Az ábráról jól leolvasható, hogy a keresett átmérő azonos lesz a gerenda keresztmetszetének átlójával amit a Pitagorasz-tétel alapján könnyen ki tudunk számolni:

$$D = 2R = \sqrt{16^2 + 24^2} = 28,84 \text{ cm} \approx 29 \text{ cm}$$

6. feladat (az 5. feladat folytatása)



38. ábra. Szemléltető ábra a veszteség számításához (méretetek cm-ben)

A 38. ábra mutatja az elméletileg ideális valamint a tényleges állapotot a rönkfa két végén.

A hulladék kiszámításakor a gerenda térfogatát kell levonnunk a nyersanyag térfogatából.

A két végén különböző átmérőjű kör keresztmetszetű rönkfa térfogatát a csonka körkúp térfogatának képletéből számíthatjuk ki, amit a.28. ábrán (Testek térfogata és felszíne – V.) találunk:

$$V_{\text{rönk}} = \frac{\pi h}{12} (D^2 + Dd + d^2)$$

ahol

$h = 6 \text{ m}$,

$d = 0,32 \text{ m}$,

$D = 0,38 \text{ m}$

$$V_{\text{rönk}} = \frac{\pi \cdot 6}{12} (0,38^2 + 0,38 \cdot 0,32 + 0,32^2) = 0,5787 \text{ m}^3$$

A test arányai alapján valószínűleg számolhattunk volna az átlagos átmérőjű ($d_{\text{átlag}} = 0,35 \text{ m}$) egyenes körhenger képletével is:

$$V_{\text{rönk}} = \frac{0,35^2 \pi \cdot 6}{4} = 0,5773 \text{ m}^3$$

Mint látjuk az eltérés ennél az esetről jelentéktelen. (a hiba 0,24%)

A gerenda térfogata:

$$V_{\text{gerenda}} = 0,16 \cdot 0,24 \cdot 6 = 0,2304 \text{ m}^3$$

A veszteség gerendánként:

A rönk térfogatát tekintjük 100%-nak, százalékértéknek pedig a rönk és a gerenda térfogatának a különbségét, azaz a hulladékot:

$a = 0,5787 \text{ m}^3$ (alap)

$sz = 0,5787 - 0,2304 = 0,3483 \text{ m}^3$ (százalékérték)

$$p = \frac{100 \cdot sz}{a} = \frac{100 \cdot 0,3483}{0,5787} = 60,18\% \approx 60\% \text{ (százalékláb)}$$

A veszteség több mint 60%! Ezt a jelentős mennyiségű megmaradó faanyagot további kisebb keresztmetszetű fűrészárúk (cseréplécek, zárlecek, deszkák) előállításához lehetne felhasználni.

A gerenda tömege:

$$\rho_{\text{fenyő}} = 500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \text{ sűrűséggel számolva (fenyőfa)}$$

$$m_{\text{gerenda}} = V_{\text{gerenda}} \cdot \rho_{\text{fenyő}} = 0,2304 \cdot 500 = 115,2 \text{ kg}$$

A gerendát két ember nem emelheti meg, mert egy felnőtt férfi maximum 50 kg-ot emelhet!

7.feladat

A kirakott két nagy „háromszög” valójában nem is háromszög, hanem négyszög ugyanis az **A** és **D** jelű háromszögek átfogói nem azonos hajlásúak. Az **A** jelűnél 2:5 (0,4) a **D** jelűnél 3:8 (0,375) az átfogó hajlása. A két hajlásszög kis különbsége az átfogók csatlakozási pontjában szemmel alig észrevehető törést okoz. Attól függően, hogy az **A** és **D** jelű háromszögek milyen sorrendben követik egymást, hol egy konvex hol egy konkáv négyszöget kapunk. A két négyszög területének különbsége okozza az egységnyi oldalú négyzet hiányát.

MÉRÉS, MÉRŐESZKÖZÖK

ESETFELVETÉS

Azt a feladatot kapta munkahelyi vezetőjétől, hogy határozza meg a 39. ábrán látható betonelem méreteit, majd állapítsa meg a betonelem tömegét. Az adatokat táblázatban rögzítse. A munkahely műszerraktárban megtalálhatók a 40–52. ábrákon szereplő mérőeszközök és berendezések. Válassza ki ezek közül azokat, melyekkel a leghatékonyabban tudná elvégezni a kapott feladatot!



39. ábra. Előregyártott betonelem

SZAKMAI INFORMÁCIÓTARTALOM

1. A mérés fogalma

Mérésnek nevezzük azt a tevékenységet, amikor egy fizikai mennyiséget valamilyen mérőeszköz segítségével összehasonlítunk egy választott mértékegységgel.

Méréskor az eredményt mindig számokban kapjuk meg. A mérés lehet közvetlen vagy közvetett.

Közvetlen méréskor az eredményt a mérőeszköztől olvashatjuk le, pl. egy mérőszalaggal megmérünk egy a mérőszalag hosszánál kisebb távolságot.

Közvetett méréskor a mérés eredményeit felhasználva számítással határozzuk meg olyan fizikai mennyiségeket, melyeknek közvetlen mérése nem lehetséges, pl. megmérjük egy téglatest alakú tartály oldalainak hosszát és ezekből az adatokból kiszámítjuk a térfogatát.

Az egyes fizikai mennyiségek méréséhez úgy kell megválasztani a megfelelő mérőeszközt, hogy az összhangban legyen a mérendő fizikai mennyiség nagyságrendjével és technikailag képes legyen biztosítani az elvárt mérési pontosságot.

Pl. ha egy csavarszár átmérőjét, egy tetőcserép szélességét vagy egy raktárépület hosszát kell megmérnünk, akkor annak ellenére, hogy mind a három fizikai mennyiség hossz jellegű, mégis más-más mérőeszközt fogunk használni. A csavarszárnál tolómérőt, ami tized mm pontosságú, a tetőcserépnél egy közönséges vonalzó is elegendő, amelyikkel mm pontossággal tudunk mérni, a raktárépület szélességét pedig valószínűleg egy cm pontosságú 50 m-es fém mérőszalaggal tudjuk kellő pontossággal megmérni.

A következőkben a hossz- és tömegmérés leggyakrabban használt mérőeszközeit mutatjuk be.

2. A hosszmérés mérőeszközei

2.1 Lézeres távolságmérők

A távolságmérők az építőanyag-gyártó üzemekben és telephelyeken sok területen használhatók. Néhány példa:

- a raktározásra alkalmas szabadtéri vagy zárt terület gyors felmérésekor
- nagyobb elem (pl. vasbeton tetőpalló) méretének meghatározásakor
- rakatmagasság meghatározásakor
- ömlesztett anyagok dőlésszögének meghatározásakor
- technológiai berendezések elhelyezésének irányításához stb.

Mérési tartomány: 5 cm-től 200 m-ig

Pontosság: 1–1,5 mm



40. ábra. Lézeres távolságmérők⁴

2.2 Mérőszalagok

A mérőszalagok használatának szükségességét nem kell külön hangsúlyozni. Az előző pontban felsoroltak mindegyikében helyettesíthető a lézeres mérés szalagos méréssel. Tudnunk kell, hogy a kézi mérés lassabb és pontossága sem éri el a lézeres mérés pontosságát. A mérési tartományt meghaladó mérendő hosszak esetén a pontatlanság egyik oka lehet, a szalag kezdő-, és végpontjának nem tökéletes egybeesése (az átállási pontatlanság).

Mérési tartomány: 1 cm-től 50 m-ig

Pontosság: 10 m-ig 2–5 mm, 10 m felett 5–10 mm

⁴ www.tavolsagmero.hu/images/disto_d3_csomag_tm.jpg (2010.05.05)

www.tavolsagmero.hu/images/disto_d5_csomag_tm.jpg (2010.05.05)

www.tavolsagmero.hu/images/disto_d8_szoftverrel_tm.jpg (2010.05.05)



41. ábra. 3m-es, 5m-es és 20 m-es fém mérőszalagok⁵



42. ábra. 50m-es fém és műanyag mérőszalag⁶

2.3 Vonalzók, szögmérők

Fém anyagú vonalzók vagy műanyag bevonattal ellátott fa anyagú vonalzók használata ajánlott építési munkahelyeken.

Mérési tartomány: 0 mm-től 300–900–1500 mm-ig

Pontosság: 0,2 mm

⁵ www.mixmarket.hu/pictures/n/SZ_068503_n.jpg (2010.05.05)

www.mixmarket.hu/pictures/n/SZ_068505_n.jpg (2010.05.05)

www.mixmarket.hu/pictures/n/SZ_68621_n.jpg (2010.05.55)

⁶ www.mixmarket.hu/pictures/n/SZ_68652_Meroszalag_nyel50m_n.jpg (2010.05.05)

www.mixmarket.hu/pictures/n/SZ_68650_n.jpg (2010.05.05)



43. ábra. Precíziós fém vonalzó és fém szögmérők⁷

2.4 Mélységmérők

Profilok, üreges termékek méreteinek meghatározásakor mélységmérők használatával pontosabb értékekhez jutunk, mint egyszerű mérőszalagos méréssel.

Mérési tartomány: 0 mm-től 300–900–1000 mm-ig

Pontosság: 0,01 mm

⁷ www.moore-and-wright.com/images/cms/File/MWEX08_complete.pdf (2010.05.05)



44. ábra. Hagyományos és digitális mélységmérők⁸

2.3 Magasságmérők

Profilok, darabárúk, kisebb méretű termékek méreteinek meghatározásakor a magasságmérők használatával gyors, pontos mérést végezhetünk.

Mérési tartomány: 0 mm-től 600 mm-ig

Pontosság: 0,01–0,02 mm



45. ábra. Hagyományos, órás és digitális magasságmérők⁹

⁸ www.moore-and-wright.com/images/cms/File/MWEX08_complete.pdf (2010.05.05)

2.4 Tolómérők

Kötőelemek, hengeres testek átmérőinek meghatározásához, termékek falvastagságának és üregeinek méret-meghatározásához tolómérőket használunk. Például egy vázkerámia-födémelem néhány milliméteres falvastagságát és a méhsejt-alakú üregek méretét egyszerű mérőszalaggal mm pontossággal megmérni szinte lehetetlen. A tolómérő mérési pontosságának és a mérendő elemrészre felfekvő „csőrének” köszönhetően nagyságrenddel pontosabb értéket ad.

Mérési tartomány: 0 mm-től 200 mm-ig

Pontosság: 0,02–0,05 mm

⁹ www.moore-and-wright.com/images/cms/File/MWEX08_complete.pdf (2010.05.05)



46. ábra. Hagyományos, órás és digitális tolómérők¹⁰

2.5 Mikrométerek

Az alábbi mérőeszközök főként betonacélok és szálak termékek (pl. üvegszövet-szál) átmérőjének meghatározására szolgálnak. Ez utóbbira a rendkívüli méretpontosság teszi alkalmassá.

Mérési tartomány: 0 mm-től 25–50–75 mm-ig

Pontosság: 0,001 – 0,01 mm

¹⁰ www.moore-and-wright.com/images/cms/File/MWEX08_complete.pdf (2010.05.05)



47. ábra. Hagyományos és digitális mikrométer¹¹

3. A tömegmérés mérőeszközei

3.1 Laboratóriumi mérlegek

Új építőanyagok fejlesztésekor és a próbadarabok tulajdonságainak meghatározásakor nagy szerepet kapnak a laboratóriumi munkák. Ugyancsak fontos az elkészült sorozattermékekből kivett minták tesztelése. Ezekhez a feladatokhoz (nedves, száraz, légszáraz állapotban történő) tömegmérés kapcsolódik.

Méréshatár: 300 – 600 gr

Pontosság: 0,001 – 0,01 gr

¹¹ www.moore-and-wright.com/images/cms/File/MWEX08_complete.pdf (2010.05.05)



48. ábra. Laboratóriumi mérlegek¹²

3.2 Asztali mérlegek

Az asztali mérlegek használata a minőségellenőrzésnél éppúgy szükséges lehet, mint pl. termékértékesítésnél.

Méréshatár: 30–50 kg

Pontosság: 5–10 gr

¹² www.metripol.hu/prod05_elemei/image008.jpg (2010.05.05)

www.metripol.hu/prod05_elemei/image002.jpg (2010.05.05)

www.metripol.hu/prod05_elemei/image006.jpg

(2010.05.05)www.metripol.hu/prod05_elemei/image010.jpg (2010.05.05)



49. ábra. Asztali mérlegek¹³

3.3 Raktári mérlegek

Készletek meghatározásánál, illetve a termeléshez szükséges alapanyagok kiadásánál, a kész termékek raktárban történő elhelyezésénél gyakorta előforduló feladat a tömegmérés. Természetesen vannak termékek, amelyeknél a darabszám a mértékegység, ám még ilyen esetben is végeznek tömegmérést. Például a fémszerelvényeket tartalmazó doboz mérésével meghatározható a dobozban lévő szerelvények darabszáma, ha ismerjük egy szerelvény tömegét.

Padlómérleg méréshatár: 300 kg

Pontosság: 150 gr

Raklap padlómérleg méréshatár: 3000 kg

Pontosság: 1,5–2 kg

¹³ www.merleg.net/kepek/nagy/wpt.jpg (2010.05.05)

www.merleg.net/kepek/nagy/acsz.jpg (2010.05.05)



50. ábra. Raktári padlómérlegek¹⁴

3.4 Függőmérlegek

A függőmérlegek alkalmazási területe a méréstartományokhoz igazodóan elég széles. Raktárakban és építési területeken telepített mérlegek hiányában szolgálhat rakományok, ömlesztett anyagokkal teli konténerek, vödrök, dobozok tömegmérésére éppúgy, mint nagyobb méretű rúdlemek (pl. vasbeton gerendák) mérésére.

Kézi függőmérleg méréshatár: 50 kg

Pontosság: 20 gr

Kompakt függőmérleg méréshatár: 200 kg

Pontosság: 100 g

Darumérleg méréshatár: 10 000 kg

Pontosság: 5 kg

¹⁴ www.emalog.hu/kepek/merleg/padlo/EBS_55_szurke_250.jpg (2010.05.05)

www.emalog.hu/kepek/merleg/padlo/epx_250.jpg (2004.05.05)



51. ábra. Kézi és kompakt függőmérleg, darumérleg¹⁵

3.4 Járműmérlegek

Az építőanyag-gyártó üzemekben és raktárakban gépjárművel történő szállítás esetén egyszerűen és gyorsan történhet a szállított tömeg ellenőrzése, ha rendelkezik a telep járműmérleggel. Ezek az eszközök (hatósági hitelesítés után) az anyagok vagy termékek átadás-átvételi bizonylatában, jegyzőkönyvében szereplő mennyiségek meghatározására alkalmasak.

Telepített és mobil járműmérleg is alkalmazható a mérésre. Ez utóbbi mérlegtípus lehetőséget ad arra is, hogy az építési területen kialakított sík terepen mérjük meg az érkező, illetve távozó gépjárművek tömegét.

Mindkét fő típus mérési tartománya 15–20 000 kg nagyságrendű, és mérési pontosságuk is hasonló, mintegy 10 kg körüli. (Az adott típusok műszaki adatainak összefoglalója ismeretében célszerű kiválasztani az üzemi berendezést)

¹⁵ static.manutangroup.com/PLU/picts/ST/735005.jpg (2010.05.05)

static.manutangroup.com/PLU/picts/ZO/HTS_casing_big.jpg (2010.05.05)

static.manutangroup.com/PLU/picts/ST/735057_new.jpg (2010.05.05)

Szemléltetésként két típust mutatunk be. A telepített (fix) mérleg a jármű lassú áthaladásakor (kb. 5 km/h) méri a tömeget. Mobil mérleg használatakor a mérleg tappancsainak elhelyezését követően a jármű rááll a mérőtappancsokra, és a tömeget a mérőtáskában lévő elektronikus műszer kijelzőjén leolvashatjuk.

Kerékterhelés: kb. 7500 kg / 1 kerék, Pontosság: 10 kg



52. ábra. Fix és mobil járműmérleg¹⁶

¹⁶ www.metripol.hu/mskten_1.jpg (2010.05.05)

Összefoglalásként válasz a felvetett esetre:

Az esetfelvetésben látható betonelem (39. ábra) méreteinek megállapításához szükséges mérőeszközök az alábbiak lehetnek:

- mm pontosságú 3 m-es fém mérőszalag (41. ábra)
- mm pontosságú fém vonalzó (43. ábra)
- digitális tolómérő a falvastagság pontosabb meghatározásához (46. ábra)
- raktári padlómérleg a tömeg meghatározásához (50. ábra)

ÖNELLENŐRZŐ FELADATOK

1. feladat

Soroljon fel 3 hossz mérésre alkalmas eszközt! Ismertesse, hogy az egyes mérőeszközök kb. milyen mérési határok között használhatók és milyen mérési pontosságot várhatunk el az eszköztől! Válaszát írja a kijelölt helyre!

2. feladat

Mutassa be azokat a mérési eszközöket, amelyek segítségével a gépjárműn elhelyezett anyagok tömege is meghatározható! Válaszát írja a kijelölt helyre!

MEGOLDÁSOK

1. feladat

- Lézeres távolságmérő

Mérési tartomány: 5 cm-től 200 m-ig,

Pontosság: 1–1,5 mm

- Fém mérőszalag

Mérési tartomány: 1 cm-től 50 m-ig

Pontosság: 10 m-ig 2–5 mm, 10 m felett 5–10 mm

- Vonalzó

Mérési tartomány: 1 mm-től 30–100 cm-ig

Pontosság: 0,5–1 mm

2. feladat

A telephelyre történő ki-, és belépéskor mérhető a gépjármű tömege. A két mérés különbsége adja a szállított anyag tömegét. A mérlegek különböző tengelynyomás elviselésére alkalmasak.

Fix, azaz telepített és mobil járműmérlegek is használhatók.

A járműnek a telepített mérlegen lassan át kell hajtania minden kerekével. A mérleg teherbírása 20 000 kg, mérési pontossága 10 kg pontosságú.

Mobil mérőeszköz esetén a tappancsokat sík felületre állítjuk, ezt követően a gépkocsi ráhajt. A műszer mérési tartománya itt is 10 kg nagyságrendű. Típustól függően ugyan, de kb. 15 000 kg össztömegű jármű mérhető az eszközzel.

IRODALOMJEGYZÉK

FELHASZNÁLT IRODALOM

Mértékegységek:

www.infres.enst.fr (2010.05.05)

www.onlineconversion.com (2010.05.05)

inm.cnam.fr (2010.05.05)

Mérőeszközök:

www.tavolsagmero.hu (2010.05.05)

www.mixmarket.hu (2010.05.05)

www.moore-and-wright.com (2010.05.05)

www.metripol.hu (2010.05.05)

www.merleg.net (2010.05.05)

www.emalog.hu (2010.05.05)

static.manutangroup.com (2010.05.05)

AJÁNLOTT IRODALOM

Batran, Bläsi, Frey, Hühn, Köhler, Kraus, Rothacher, Sonntag: Építőipari alapismeretek, (ford: Nika Endre), B+V Lap- és könyvkiadó, 1998.

Dr. Palotás László: Mérnöki Kézikönyv I. kötet, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

Dr. Balázs György: Építőanyag praktikum, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983.

Dr. Obádovics J. Gyula: Matematika (17. kiadás), Scolar Kiadó, 1994.

A(z) 0504–06 modul 012–es szakmai tankönyvi tartalomeleme
felhasználható az alábbi szakképesítésekhez:

A szakképesítés OKJ azonosító száma:	A szakképesítés megnevezése
31 582 01 0000 00 00	Betonelemgyártó
54 543 01 0000 00 00	Építőanyag-ipari technikus
31 521 13 0000 00 00	Kemencekezelő, -égető
31 543 01 0000 00 00	Finomkerámiagyártó gép kezelője
31 543 01 0100 31 01	Kerámiaipari gépkezelő
31 543 06 0000 00 00	Mész- és cementterméket gyártó gép kezelője
31 543 10 0000 00 00	Üveggyártó
31 543 10 0100 31 01	Üvegfűvő

A szakmai tankönyvi tartalomelem feldolgozásához ajánlott óraszám:
14 óra

MUNKANYAG

A kiadvány az Új Magyarország Fejlesztési Terv
TÁMOP 2.2.1 08/1–2008–0002 „A képzés minőségének és tartalmának
fejlesztése” keretében készült.

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap
társfinanszírozásával valósul meg.

Kiadja a Nemzeti Szakképzési és Felnőttképzési Intézet
1085 Budapest, Baross u. 52.
Telefon: (1) 210–1065, Fax: (1) 210–1063

Felelős kiadó:
Nagy László főigazgató