

Mádai László

Logikai algebra alapjai, logikai függvények II.



A követelménymodul megnevezése:

Elektronikai áramkörök tervezése, dokumentálása

A követelménymodul száma: 0917-06 A tartalomelem azonosító száma és célcsoportja: SzT-042-50



LOGIKAI FÜGGVÉNYEK SZABÁLYOS ALAKJA, SZISZTEMATIKUS EGYSZERŰSÍTÉSEK

ESETFELVETÉS – MUNKAHELYZET

Az ESETFELVETÉS – MUNKAHELYZET részre vonatkozó formai információk

Az Ön munkahelyén működik egy szivattyútelep. A telepen három szivattyú végzi a feladatát, de közülük egyszerre mindig csak 2 működik, óránként úgy váltanak, hogy először az 1-es és 2-es, majd a 2-es és 3-as, azután 3-as és 1-es szivattyúk működnek párban. Mindegyik szivattyú egy – egy hibajelzővel is felszerelt. (H1, H2, H3)

Ön azt a feladatot kapja, hogy a hibajelzők jeleinek felhasználásával, készítse el a szivattyúk működtetésének logikai függvényeit, arra az esetre, ha üzemzavar van. (Ha valamelyik szivattyú hibás. Ha már kettő hibajel van, akkor nem kell működtetni egyiket sem!)

SZAKMAI INFORMÁCIÓTARTALOM

A belépési feltételek:

Logikai algebra alapjai, logikai függvények I. tananyagelem sikeres teljesítése.

1. Logikai függvények szabályos (kanonikus) alakjai

Amint azt az előző tananyagelem (Logikai függvények I.) feldolgozásakor tapasztalhattuk, az algebrai alakban felírt logikai függvények hátránya, hogy egy –egy függvényt több, egymással ekvivalens módon felírhatunk (lásd egyszerűsítések).

Ezt a problémát a szabályos alakok alkalmazásával tudjuk megoldani. A szabályos alakban írt függvénynek csak egyetlen egy alakja van.

Alapfogalmak:

Term – a változók azon csoportja, amelyeket azonos logikai szimbólum köt össze. Pl.: A.B.C vagy $\bar{A}+B+C+D$

Minterm – olyan term amelyben a változók logikai ÉS kapcsolatban állnak, minden változó (ponált vagy tagadott formában) egyszer és csakis egyszer szerepel. Pl.: 3 változós mintermek: $A.B.C$ vagy $\bar{A}.B.C$

Maxterm – olyan term amelyben a változók logikai VAGY kapcsolatban állnak minden változó (ponált vagy tagadott formában) egyszer és csakis egyszer szerepel. Pl.: 3 változós maxtermek: $A+B+C$ vagy $\bar{A}+\bar{B}+C$

A SZABÁLYOS ALAKÚ FÜGGVÉNYEK csoportosítása, fogalma:

Szabályos alakú függvény	
DISZJUNKTÍV	KONJUKTÍV
Mintermek VAGY kapcsolatából áll	Maxtermek ÉS kapcsolatából áll
$F^3 = \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}$	$F^3 = (A + \bar{B} + C)(\bar{A} + B + C)$

A szabályos alaknak igen nagy jelentősége van, mivel a szisztematikus (tervszerű) egyszerűsítési eljárásokat csak ezen alakok használata esetén lehet alkalmazni.

A nem szabályos alakú függvényeket szabályos alakúvá kell tenni!

A művelet alapját a már korábban megismert:

Az algebrai kifejezés bővítése adja:

Egy logikai szorzat nem változik, ha 1-el megszorozzuk, vagyis

$$AB = AB * 1$$

Az 1-et pedig felírhatjuk, pl. $(C + \bar{C})$ alakban. Tehát:

$$AB = AB(C + \bar{C}) = ABC + AB\bar{C}$$

Egy logikai összeadás eredménye nem fog megváltozni, ha 0-t hozzáadunk:

$$D + E = D + E + 0$$

A "0"-t kifejezhetjük $F * \bar{F}$ alakban. A bővítést végrehajtva az

$$D + E = (D + E) + F * \bar{F} = (D + E + F)(D + E + \bar{F})$$

azonosságot kapjuk

Gyakorlás

Alakítsuk szabályos alakúvá az alábbi függvényt:

$$F^3 = AB + \bar{B}C + AC$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} F^3 &= AB + \bar{B}C + AC = AB(C + \bar{C}) + BC(A + \bar{A}) + AC(B + \bar{B}) = \\ &= ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC + ABC + A\bar{B}C = ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC \end{aligned}$$

2. Logikai függvények szisztematikus egyszerűsítése

A term -ek helyettesítése

A függvény egy maxtermjét, vagy mintermjét, bináris számként is felírhatjuk. Ehhez először megadjuk a változókhoz rendelt helyértéket, és a ponált változó helyére 1-t, míg a negált helyére 0-t írunk. Ez a szám lesz az adott maxterm, vagy minterm sorszáma - (súlya).

Például:

Legyen az $C \div 2^2, B \div 2^1, A \div 2^0$ súlyozású. Ekkor a

$$\bar{C}BA \text{ minterm számértéke, súlya: } 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 1 * 2^0 = 101_B = 5$$

$$\bar{C} + B + \bar{A} \text{ maxterm számértéke, súlya: } 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0 = 010_B = 2$$

A mintermeket az m_i^v kifejezéssel, ahol az m jelzi, hogy minterm, a felső index v a változók számát, az alsó index i pedig a sorszámot jelenti.

Hasonlóan a maxtermeket is helyettesíthetjük a M_i^v kifejezéssel. Az indexek (v,i) jelentése ugyan az, míg az M jelzi, hogy maxterm.

A leírtakat a példában szereplő kifejezésekre (ugyanazon változó súlyozásnál) a

$$\bar{C}BA \div m_5^3$$

és a

$$\bar{C} + B + \bar{A} \div M_2^3$$

helyettesítéseket alkalmazhatjuk.

Függvények helyettesítése

Az ismertett helyettesítésekkel a diszjunktív, valamint konjunktív kanonikus függvények is rövidebben írhatók. Vegyük példának az előzőekben felírt függvények alaki helyettesítését az $A \div 2^2, B \div 2^1, C \div 2^0$ változó súlyozás alkalmazásával:

$$K = \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C}$$

$$K = m_4 + m_2 + m_6 + m_3$$

$$K = (A + B + C)(A + B + \overline{C})(\overline{A} + B + \overline{C})(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$$

$$K = M_7 * M_6 * M_2 * M_0$$

A függvények felírása tovább is egyszerűsíthető oly módon, hogy megadjuk a függvény - alak -ot a változók számát, és a függvényben szereplő term -ek sorszámait.

A diszjunktív alakot a $\sum^v(\dots)$, a

konjunktív alakot a $\prod^v(\dots)$ formában írjuk.

A két minta függvény egyszerűsített felírása (ugyanazon változó-súlyozást alkalmazva):

$$K = \sum^3(2,3,4,6)$$

$$K = \prod^3(7,6,2,0)$$

3. Szisztematikus egyszerűsítési eljárások

Ezen eljárások közös előnye, hogy az egyszerűsítést mechanikussá teszi. Így a tévedéseknek, elírásoknak a lehetősége határozottan csökken, ráadásul jóval kevesebb írásos munkát kíván.

Az eljárás alapját, a már többször alkalmazott két logikai összefüggés sorozatos alkalmazása adja:

$$(A+B)(A+\overline{B}) = A$$

$$AB + A\overline{B} = A$$

Szavakban: ha két szabályos term (minterm, vagy maxterm) csak egyetlen változó értékében tér el, akkor a két term összevonható, az eredmény az amiben közösek.

Grafikus módszerek

A módszer alapját VEITCH (ejtsd: vejcs) dolgozta ki. KARNAUGH (ejtsd: karnó) tovább fejlesztette.

Az egyszerűsítendő függvényt cellákból (négyzetögekből) álló diagramban ábrázoljuk.

A diagram v darab változó esetén 2^v számú cellát tartalmaz.

Minden cella egy darab szabályos termet képvisel.

A cellák úgy vannak elhelyezve, hogy az egymás melletti cellák (vízszintesen és függőlegesen) csak egy változóban különböznek.

A logikai függvény ábrázolása úgy történik, hogy a megfelelő cellákba 1-et írunk.

Veitch módszere:

A diszjunktív függvények ábrázolására szolgálnak a minterm táblák:

A kétváltozós minterm tábla:

		<u>B</u>	
		$\bar{A}.\bar{B}$	$\bar{A}.B$
A		$A.\bar{B}$	$A.B$

1. ábra. Kétváltozós minterm tábla

	<u>B</u>	
	0	1
A	2	3

2. ábra. Kétfváltozós minterm tábla cellasorszámai

A cellák sorszámainak származtatásánál $A \div 2^1$, $B \div 2^0$ súlyozással számolunk. Ha megvizsgáljuk az egyes, szomszédos cellákat, akkor látható, hogy azok csak egy változó értékében térnek el.

	<u>B</u>			
	0	1	3	2
A	4	5	7	6
	<u>C</u>			

3. ábra. Háromváltozós minterm tábla

	<u>C</u>				
	0	1	3	2	
	4	5	7	6	
A	12	13	15	14	B
	8	9	11	10	
	<u>D</u>				

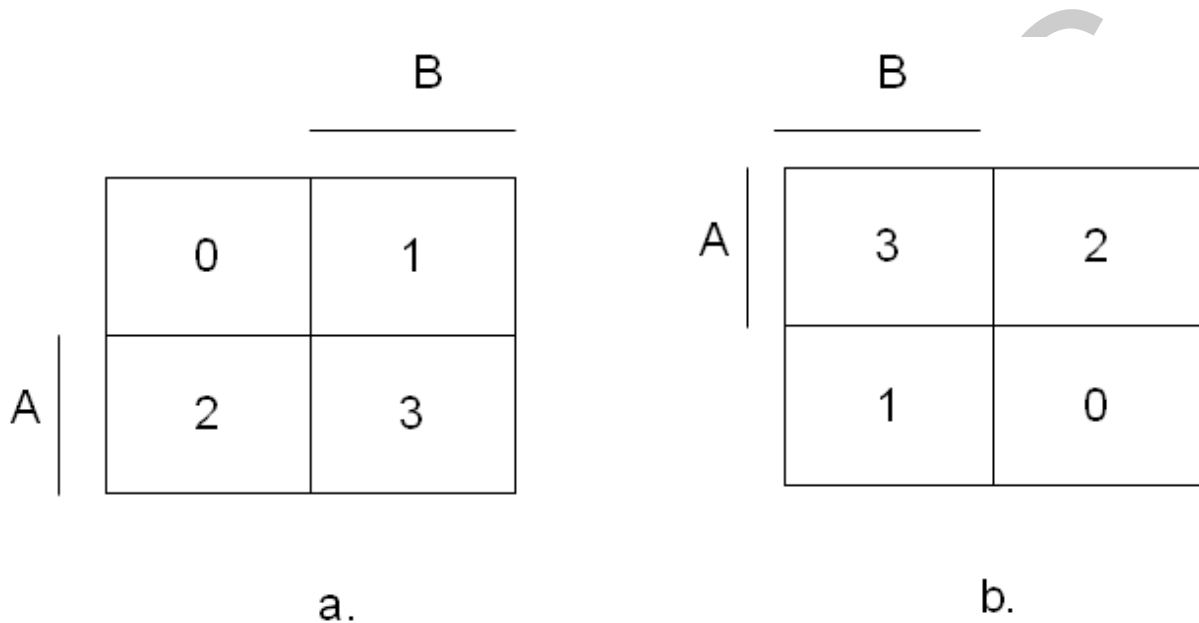
4. ábra. Négyváltozós minterm tábla

Veitch maxterm táblái

A maxterm táblákat a minterm táblából származtatja. Az eljárás lépései:

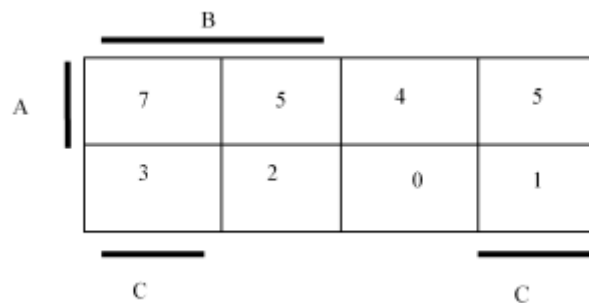
Átsorszámozzuk a cellákat $i_M = 2^v - 1 - i_m$

A független változók helyét a táblázat szélénél ellentétesre változtatjuk



5. ábra. Minterm – Maxterm átalakítás

Az előző példa a kétváltozós minterm (a. ábra) és kétváltozós maxterm tábla (b. ábra) átalakítását mutatja. Természetesen az átalakítás megfordítható! Ezzel az eljárással jutunk el a 3 illetve 4 változós maxterm tábláig is:



6. ábra. Háromváltozós maxterm tábla

	C						
A		15	14	12	13		B
		11	10	8	9		
		3	2	0	1		
		7	6	4	5		B
		D		D			

7. ábra. 4 változós maxterm tábla

Megjegyzés: A példákban szereplő minterm és maxterm táblák csak akkor és csakis akkor igazak, ha a változók súlyozása olyan hogy az „A” változó a legmagasabb helyérték. (Pl.: a 4 változós maxterm táblánál $A \div 2^3$, $B \div 2^2$, $C \div 2^1$, $D \div 2^0$!)

4. Logikai függvények ábrázolása és egyszerűsítése Veich táblával

A függvények ábrázolása úgy történik, hogy a szabályos alakú függvényben szereplő termeknek megfelelő sorszámú cellába 1-et írunk.

Példaként ábrázoljuk a $F^3 = ABC + ABC\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}C$ függvényt.

Célszerű leírunk sorszámozott (rövid) alakba a diszjunktív függvényünket:

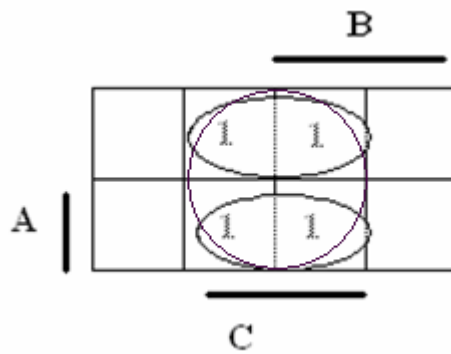
$$F^3 = \sum^3(1,3,5,7)$$

Felvesszük a háromváltozós minterm táblát, bejelöljük az 1-3-5-7 termeket:

		B			
A		0	1 1	3 1	2
		4	5 1	7 1	6
		C			

8. ábra.

A bejelölt termeket párokba csoportosítjuk. Ha mód van rá, akkor a párokból ismét képezhetünk dupla párokat és így tovább.



9. ábra.

Az egyszerűsített függvény az lesz, amiben a pár / csoport azonos. Jelen esetben a 4 jelölt cella egy változóban közös, ez az C. Ezért az egyszerűsített függvényünk $F3 = C$!

- Mint ez a példából is érzékelhető. A Bool egyszerűsítéshez képest egyszerűbben, megbízhatóbban juthatunk el az egyszerűsített függvényig. Arról azonban szólni kell, hogy az eredmény több különböző alakban is megjelenhet (mivel ez már nem szabályos alakú), függ attól, hogy hogyan képeztük a párokat, csoportokat!

TANULÁSIRÁNYÍTÓ

A szakmai információtartalom tanulmányozása

Önellenőrző feladatok megoldása

Feladat megoldása

ÖNELLENŐRZÉS

Oldja meg az alábbi feladatokat!

1. feladat

Írja le a szabályos- és a nem szabályos alakú logikai függvények közötti lényeges különbséget!

2. feladat

A következő háromváltozós függvényt alakítsa szabályos alakú függvénnyé!

$$F^3 = A.B + \bar{B}.C$$

3. feladat

Írja fel az előző, algebrai alakban megadott függvény sorszámos (rövid) alakját!

$$F^3 =$$

4. feladat

Készítse el az előző függvény igazságtáblázatát!

5. feladat

Készítse el a szivattyúk működtetésének hibajelzőinek, igazságtáblázatát!

$H_3 \div 2^2$ $H_2 \div 2^1$ $H_3 \div 2^0$ SZ1 SZ2 SZ3

6. feladat

Írja fel a három szivattyú működésének logikai függvényét sorszámos, majd algebrai alakban!



MEGOLDÁSOK

1. feladat

Minden term tartalmazza az összes változót
Az összes term minterm vagy maxterm típusú (csak az egyik!)

2. feladat

$$F^3 = A.B + \bar{B}.C$$

$$F^3 = A.B.(C + \bar{C}) + (A + \bar{A}).\bar{B}.C = A.B.C + A.B.\bar{C} + A.\bar{B}.C + \bar{A}.\bar{B}.C$$

3. feladat

$$F^3 = \Sigma(7,6,5,1)$$

4. feladat

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

5. feladat

$H_3 \div 2^2$	$H_2 \div 2^1$	$H_1 \div 2^0$	SZ1	SZ2	SZ3
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1

0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0

6. feladat

$$SZ1 = \Sigma(2,4) = \bar{H}_3 \cdot H_2 \cdot \bar{H}_1 + H_3 \cdot \bar{H}_2 \cdot \bar{H}_1 = \bar{H}_1 (\bar{H}_3 \cdot H_2 + H_3 \cdot \bar{H}_2)$$

$$SZ2 = \Sigma(1,4) = \bar{H}_3 \cdot \bar{H}_2 \cdot H_1 + H_3 \cdot \bar{H}_2 \cdot \bar{H}_1 = \bar{H}_2 (\bar{H}_3 H_1 + H_3 \bar{H}_1)$$

$$SZ3 = \Sigma(1,2) = \bar{H}_3 \cdot \bar{H}_2 \cdot H_1 + \bar{H}_3 \cdot H_2 \cdot \bar{H}_1 = \bar{H}_3 (\bar{H}_2 H_1 + H_2 \bar{H}_1)$$

Ez azt jelenti, hogy nem üzemszerű működéskor (hiba esetén) az adott sorszámú szivattyút, a másik két sorszámú hibajel XOR (kizáró vagy) kapcsolata működteti!

IRODALOMJEGYZÉK

A címelem tartalma és formátuma nem módosítható.

Több fejezetből álló munkafüzet esetén is csak egyszer, a munkafüzet legvégén kerüljön feltüntetésre az irodalomjegyzék, az alábbiakban látható bontásban.

FELHASZNÁLT IRODALOM

Mádai László, Logikai algebra és számrendszerek. Tanfolyami jegyzet 1996/2003. Dunaferr Szakközép és Szakiskola.

AJÁNLOTT IRODALOM

Dr. Arató Péter: Logikai rendszerek tervezése (Tankönyvkiadó)

Zsom Gyula: Digitális technika I. (KKMF, 49273/I)

Kovács Csongor: Digitális elektronika (General Press)

Flesch István: Logikai rendszerek tervezése példatár (Műegyetemi Kiadó 51251)

Benesóczky – Selényi: Digitális technika példatár (Műegyetemi Kiadó 55005)

Rómer Mária: Digitális technika példatár (KKMF-1105)

A(z) 0917-06 modul 042-es szakmai tankönyvi tartalomeleme felhasználható az alábbi szakképesítésekhez:

A szakképesítés OKJ azonosító száma:	A szakképesítés megnevezése
54 523 01 0000 00 00	Elektronikai technikus

A szakmai tankönyvi tartalomelem feldolgozásához ajánlott óraszám:
12 óra

MUNKANYELV

MUNKANYAG

A kiadvány az Új Magyarország Fejlesztési Terv
TÁMOP 2.2.1 08/1–2008–0002 „A képzés minőségének és tartalmának
fejlesztése” keretében készült.

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap
társfinanszírozásával valósul meg.

Kiadja a Nemzeti Szakképzési és Felnőttképzési Intézet
1085 Budapest, Baross u. 52.

Telefon: (1) 210–1065, Fax: (1) 210–1063

Felelős kiadó:
Nagy László főigazgató