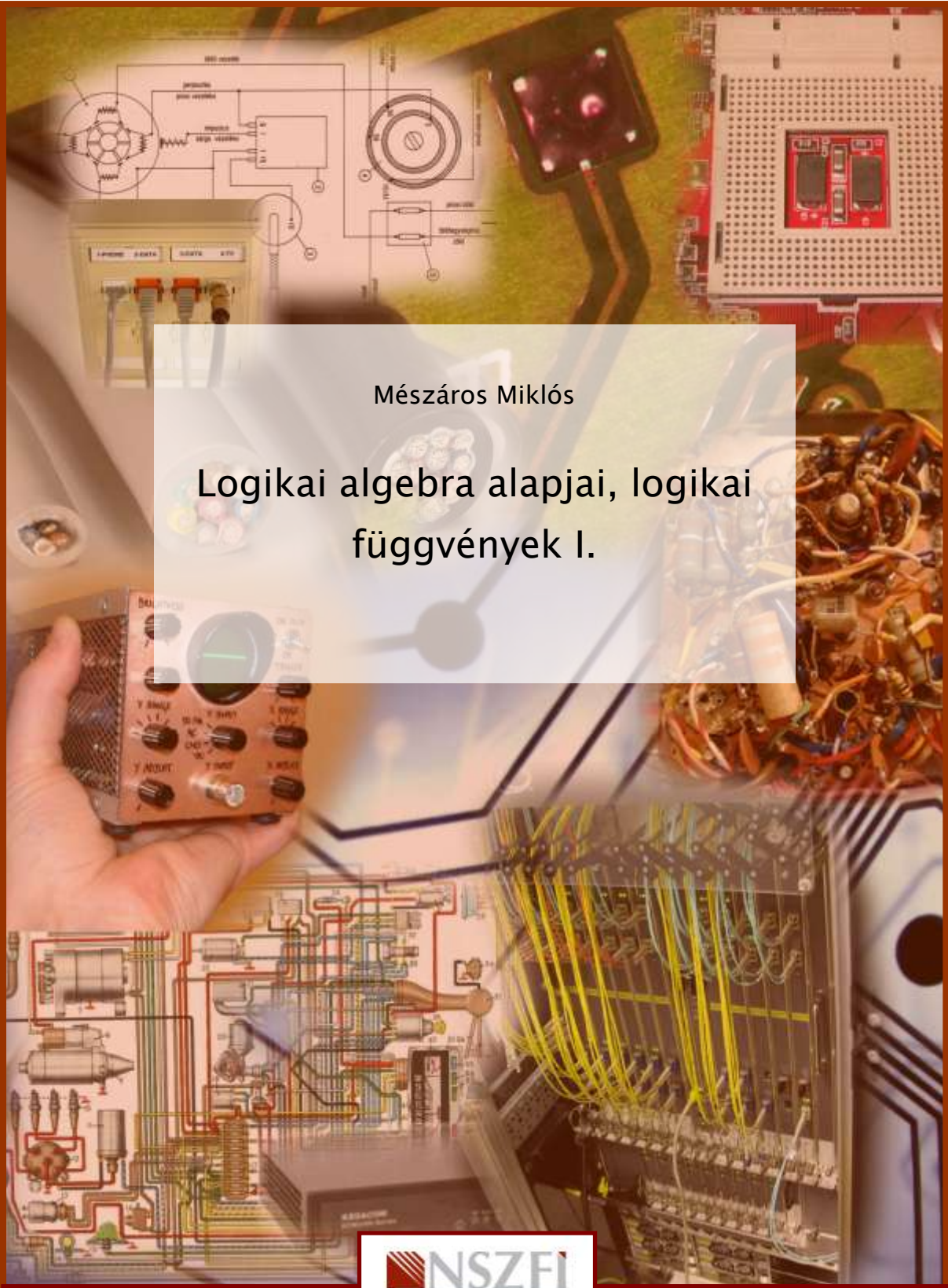




Mészáros Miklós

## Logikai algebra alapjai, logikai függvények I.

**NSZFI**  
NEMZETI SZAKKÉPZÉSI  
ÉS FELNŐTTKÉPZÉSI INTÉZET

A követelménymodul megnevezése:

Elektronikai áramkörök tervezése, dokumentálása

A követelménymodul száma: 0917-06 A tartomelem azonosító száma és célcsoportja: SzT-016-50

## LOGIKAI ALGEBRA ALAPJAI, LOGIKAI FÜGGVÉNYEK I.

### ESETFELVETÉS – MUNKAHELYZET

Munkahelyén döntés született: a mérő laboratóriumot az újonnan kinevezett vezetés átállítja logikai áramkörök vizsgálatára. Felettesétől azt az utasítást kapta, hogy a frissen belépett munkatársai számára frissítse fel a logikai algebra alapjaihoz kapcsolódó fogalmakat, szabályokat, alaptételeket. Ismertesse a logikai függvények jellemzőit, s térjen ki a logikai függvények egyszerűsítésére, realizálására. Végeztessen logikai függvényekkel kapcsolatos egyszerűsítéseket, igazoltasson velük logikai azonosságokat, s megadott szempontok és műszaki előírások szerint valósítsanak meg logikai függvényeket. Tanulmányozza az alábbi szakmai információkat, s oldja meg az önellenőrző feladatokat!

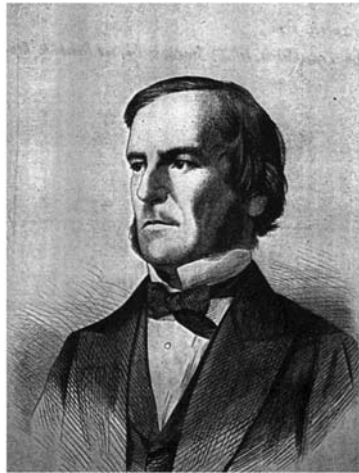
### SZAKMAI INFORMÁCIÓTARTALOM

#### BEVEZETŐ

A digitális áramkörök tervezéséhez az impulzustechnika fejlődése és a logikai algebrai alapokkal felismert kapcsolata vezetett. A logikai áramkörök működésének megértéséhez a logikai algebrai alapfogalmak tisztázása szükséges. Ezen alapkövekre építhetők a logikai függvények, azok leírási módszerei és Boole-algebrai egyszerűsítési megoldásai. Egyszerűsíteni a nevezetes logikai függvények ismeretében lehetséges. Az összetett logikai függvények realizálásához nevezetes kapuáramköröket alkalmaznak. A függvények áramköri megvalósítása funkcionálisan teljes rendszerek ismeretét feltételezi. Mindezek lényegre törő bemutatásával találkozhatunk az alábbiakban.

#### ALAPFOGALMAK

A **logika** segítséget nyújt a célratörő gondolkodásmód, a helyes következtetések kialakulásához, a tényleges valóság feltárásához. A klasszikus, kétértékű logika a helyzet leírásához a kijelentések igaz-hamis tényállásait alkalmazza. George Boole, angol matematikus (ld. 1. ábra!) nevéhez fűződik a logikai kapcsolatok matematikai nyelven történő megfogalmazása.



1. ábra. George Boole (1815–1864) angol matematikus<sup>1</sup>

**Boole–algebra:** logikai algebra, mely a logikai törvényszerűségeket matematikai nyelven, a kettes (bináris) számrendszer segítségével írja le. Az igaz–hamis kijelentésekhez, állapotokhoz számjegyeket rendel: **igaz**→1 és **hamis**→0.

A szaktudományokhoz alkalmazott logikai algebra a tényfeltárásokhoz és a megoldásokhoz változókat és állandókat alkalmaz, melyek között **logikai függvények** teremtenek kapcsolatot.

A logikai algebrai alakban megadott problémák megoldásához **szabályokat** és **alaptételeket** alkalmaznak.

A bonyolultabb helyzetek megoldásához az alkalmazott **logikai függvények egyszerűsítése** kapcsán lehet eljutni. A leggyorsabb és legáttekinthetőbb eljárás a **grafikus egyszerűsítés**.

A logikai kapcsolatok megjelenítéséhez, az egyszerűsített logikai függvények realizálásához **logikai kapukat** alkalmaznak.

**Digit:** angol szó, jelentése: számjegy

**Digitális leképezés:** egy fizikai mennyiséghez, pl. feszültséghez vagy áramhoz nem folyamatos, hanem meghatározott, ugrásszerű értékeket rendelnek. A modern logikai kapuáramkörök létrejöttéhez a digitális leképezés vezetett.

## LOGIKAI FÜGGVÉNYEK

A tények és események közötti kapcsolatrendszer logikai függvényekkel lehet leírni. A 2. ábra a logikai függvények szerkezetét szemlélteti.

---

<sup>1</sup> Forrás: <http://www.holyfamilyrockford.org>



2. ábra. A logikai függvények szerkezete

**Független változók** (jelölés  $A, B, C, \dots$ ): logikai alapfeltételek

**Függő változók** (jelölés  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ ): a logikai alapfeltételek hatására bekövetkező események

**Függvénykapcsolat** (jelölés *logikai szimbólumokkal*): a logikai feltételek és események közötti kapcsolatok

### A logikai függvények fajtái

- A logikai változók időbeni függése szerint:
  - időfüggetlen logikai függvények – A függő változó kizárólag a függő változó értékétől függ. Megvalósításuk: kombinációs logikai hálózatokkal.

Függvényalakja:

$$Y = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

- → időfüggő logikai függvények – A függő változó értékét a független változók különböző időknél felvett értékei is befolyásolják. Megvalósításuk: sorrendi (szekvenciális) hálózatokkal. Függvényalakja:

$$Y = f(A_{1t}, A_{2t}, \dots, A_{1(t-1)}, \dots)$$

- A logikai változók száma szerint:
  - egyváltozós logikai függvények – egy független változójú függvény.
  - **kétváltozós logikai függvények** – két független változójú függvény.
  - többváltozós logikai függvények –  $n$  db független változójú függvény, a gyakorlat
  - többnyire ezeket alkalmazza.

### 1. A logikai függvények leírásmódjai

A logikai függvények leírása változatos módszerekkel történhet. A leggyakrabban előforduló függvény leírási, megadási módok az alábbiakban tanulmányozhatók.

**Szöveges megadás:** Az alapfeltételek (*független változók*) kombinációit, a logikai kapcsolatot (*függvénykapcsolat*) és a következtetéseket (*függő változókat*) egyaránt szavakban fogalmazzák meg. Pl.: "Az országgyűlési választás már az első fordulóban érvényes, ha a választók minimum 50 százaléka részt vesz a szavazáson."

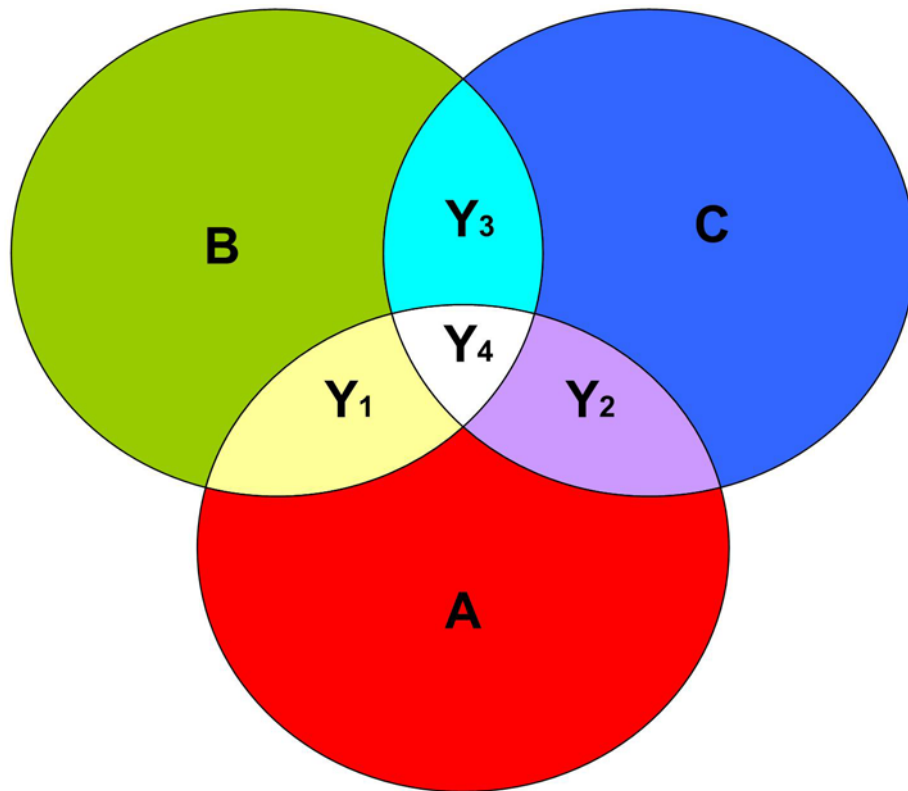
**Táblázatos megadás:** Olyan értéktáblázatot hoznak létre, amely tartalmazza az alapfeltételek (*független változók*) minden kombinációjához tartozó következtetések (*függő változók*) értékeit. Az így létrejövő igazságtáblázatban logikai igazságok rögzítése történik. A 3. ábrán ilyen táblázat látható. Független változók: **A** és **B**, Függő változó:  **$Y^2$**

| <b>A</b> | <b>B</b> | <b><math>Y^2</math></b> |
|----------|----------|-------------------------|
| 0        | 0        | 1                       |
| 0        | 1        | 0                       |
| 1        | 0        | 0                       |
| 1        | 1        | 0                       |

3. ábra. Táblázatos függvénymegadás

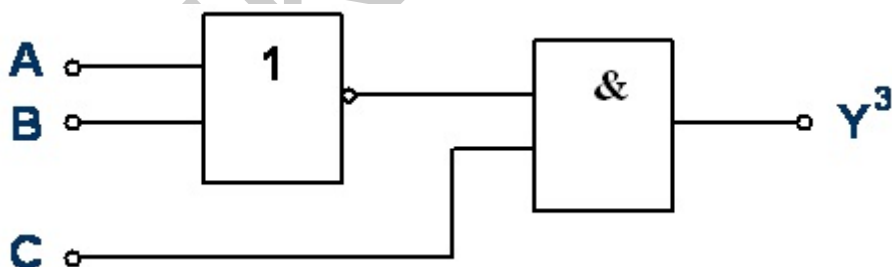
**Halmazokkal történő leírás:** az alapfeltételekhez (*független változókhoz*) tartozó következtetések (*függő változók*) közötti függvénykapcsolatot illeszkedő halmazokkal lehet szemléletessé tenni. A 4. ábrán a műszaki gyakorlatban előforduló színkeverés megoldása látható. A független változókat (**A**, **B**, **C**) az alapszínek, a függő változókat ( **$Y_1$** ,  **$Y_2$** ,  **$Y_3$** ,  **$Y_4$** ) pedig a kikevert színek szemléltetik.





4. ábra. Halmazokkal történő leírás

**Logikai vázlat:** az alapfeltételekhez (független változókhoz) tartozó következtetések (függő változók) közötti függvénykapcsolatot áramköri szimbólumokkal, logikai kapuk összekapcsolásával valósítják meg. Ilyen logikai vázlat látható az 5. ábrán.

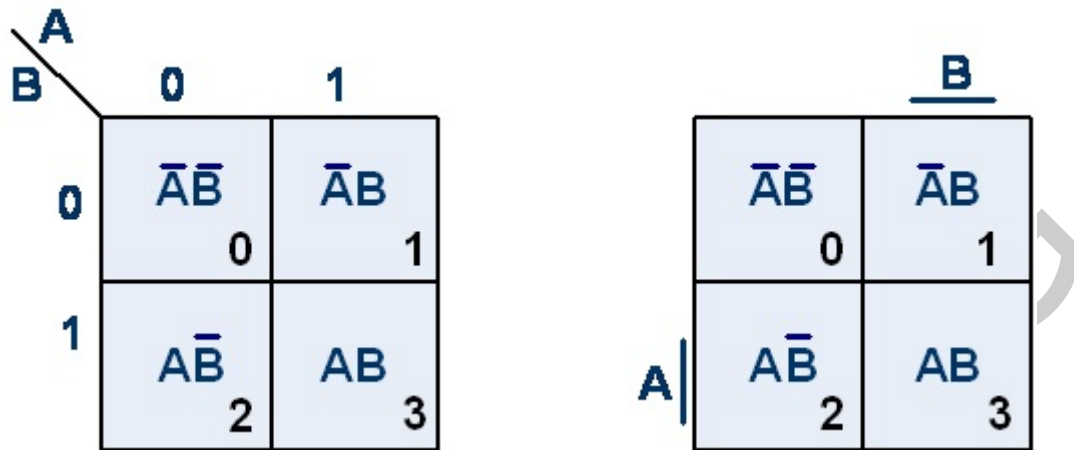


5. ábra. Logikai vázlattal történő függvénymegadás

**Algebrai megadás:** az alapfeltételekhez (független változókhoz) tartozó következtetések (függő változók) közötti logikai kapcsolatot, függvénykapcsolatot műveleti szimbólumokkal valósítják meg. Pl.:

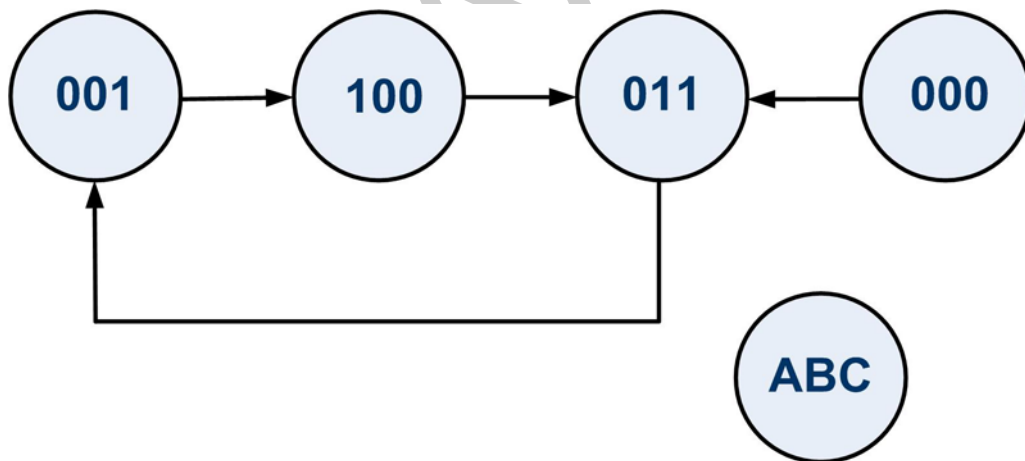
$$F^4 = \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C + B \cdot C$$

**Grafikus megadás:** a műszaki gyakorlatban a Karnaugh-tábla és a Veitch-tábla a legelterjedtebb. Mindkét grafikus megadásra jellemző a szemléletes ábrázolásmód. A táblák két független változó esetén a 6. ábrán láthatóak.



6. ábra. Grafikus függvénymegadás: A Karnaugh-tábla és a Veitch-tábla

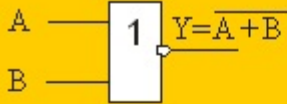
A grafikus megadási módok között **állapotdiagramos** leírás is megtalálható. Az A, B, C nagybetűkkel jelölt független változók különböző állapotai a körökben láthatóak. Egy állapotdiagramos függvénymegadást a 7. ábra tartalmaz.



7. ábra. Állapotdiagram

A logikai algebrában a függvénykapcsolatok lehetséges számát alapvetően a független változók száma határozza meg. A leggyakrabban alkalmazott algebrai logikában a független változók két értéket (0 és 1) vehetnek fel.

Az  $N$  függvénykapcsolatok számát  $n$  független változó,  $2^n$  kombináció esetén a 8. ábra szemlélteti.

| VAGY-NEM (NOR) |   |  |
|----------------|---|------------------------------------------------------------------------------------|
| Bemenetek      |   | Kimenet                                                                            |
| A              | B | Y                                                                                  |
| 0              | 0 | 1                                                                                  |
| 0              | 1 | 0                                                                                  |
| 1              | 0 | 0                                                                                  |
| 1              | 1 | 0                                                                                  |

8. ábra. Függvénykapcsolatok száma

A kétváltozós logikai függvénykapcsolatok között a műszaki életben nevezetes függvények is előfordulnak. A 16 db függvénykapcsolatot a 9. ábra táblázata mutatja be.



|            |          |          |          |          |                                                           |                                     |
|------------|----------|----------|----------|----------|-----------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| <b>A</b>   | <b>0</b> | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>1</b> |                                                           |                                     |
| <b>B</b>   | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>0</b> | <b>1</b> |                                                           |                                     |
| $F_0^2$    | 0        | 0        | 0        | 0        | $F_0^2 = 0$                                               | SOHA függvény                       |
| $F_1^2$    | 0        | 0        | 0        | 1        | $F_1^2 = A \cdot B$                                       | ÉS (AND) függvény                   |
| $F_2^2$    | 0        | 0        | 1        | 0        | $F_2^2 = A \cdot \bar{B}$                                 | LETILTÓ (INHIBITÁLÓ) függvény       |
| $F_3^2$    | 0        | 0        | 1        | 1        | $F_3^2 = A$                                               | ISMÉTLÉS függvény                   |
| $F_4^2$    | 0        | 1        | 0        | 0        | $F_4^2 = \bar{A} \cdot B$                                 | LETILTÓ (INHIBITÁLÓ) függvény       |
| $F_5^2$    | 0        | 1        | 0        | 1        | $F_5^2 = B$                                               | ISMÉTLÉS függvény                   |
| $F_6^2$    | 0        | 1        | 1        | 0        | $F_6^2 = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B} = A \oplus B$  | KIZÁRÓ VAGY (ANTIVALENCIA) függvény |
| $F_7^2$    | 0        | 1        | 1        | 1        | $F_7^2 = A + B$                                           | VAGY (OR) függvény                  |
| $F_8^2$    | 1        | 0        | 0        | 0        | $F_8^2 = \overline{A + B}$                                | VAGY NEM (NOT) függvény             |
| $F_9^2$    | 1        | 0        | 0        | 1        | $F_9^2 = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B} = A \otimes B$ | EKVIVALENCIA függvény               |
| $F_{10}^2$ | 1        | 0        | 1        | 0        | $F_{10}^2 = \bar{B}$                                      | NEGÁCIÓ függvény                    |
| $F_{11}^2$ | 1        | 0        | 1        | 1        | $F_{11}^2 = A + \bar{B}$                                  | KÖVETKEZIK (IMPLIKÁCIÓ) függvény    |
| $F_{12}^2$ | 1        | 1        | 0        | 0        | $F_{12}^2 = \bar{A}$                                      | NEGÁCIÓ függvény                    |
| $F_{13}^2$ | 1        | 1        | 0        | 1        | $F_{13}^2 = \bar{A} + B$                                  | KÖVETKEZIK (IMPLIKÁCIÓ) függvény    |
| $F_{14}^2$ | 1        | 1        | 1        | 0        | $F_{14}^2 = \overline{A \cdot B}$                         | ÉS NEM (NAND) függvény              |
| $F_{15}^2$ | 1        | 1        | 1        | 1        | $F_{15}^2 = 1$                                            | MINDIG függvény                     |

9. ábra. Kétfváltozós logikai függvények

A fenti táblázatban piros színnel berajzolható szimmetria tengely azt jelképezi, hogy a vonaltól azonos sortávolságra lévő függvénykapcsolatok egymás ellentétjei, negáltjai.

**Duál-tétel:** ha a logikai ÉS (AND) műveletet logikai VAGY (OR) művelettel, ezzel együtt a logikai 0-t logikai 1-gyel helyettesítjük (vagy fordítva), akkor az eredeti függvény duál függvényéhez juthatunk.

## A LOGIKAI ALGEBRA LEGFONTOSABB SZABÁLYAI ÉS ALKALMAZÁSUK

A logikai algebra segítségével műszaki gyakorlati problémák modellezése válik szemléletessé. A felvázolt problémához alkalmazott összetett logikai függvények általában bonyolultak és túlhatározottak. A Boole-algebra azonosságai, szabályai és alaptételei segítségével az összetett logikai függvények átalakíthatók és leegyszerűsíthetők. Az átalakítások során a 10–11. ábrákban elhelyezett szabályokat és tételeket alkalmazzuk.

|                      |                                                                                                                |                                                           |
|----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| Kommutatív szabály   | $A + B = B + A$<br>$A \cdot B = B \cdot A$                                                                     | Azonos logikai kapcsolatban levő változók felcserélhetők. |
| Asszociatív szabály  | $(A + B) + C = (B + C) + A = (A + C) + B$<br>$(A \cdot B) \cdot C = (B \cdot C) \cdot A = (A \cdot C) \cdot B$ | Az eredmény független a műveletvégzés sorrendjétől.       |
| Disztributív szabály | $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$<br>$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$                     | A zárójelek felbontása nem befolyásolja az eredményt.     |

10. ábra. Szabályok a logikai algebrában

|                       |                            |                                                                                                           |
|-----------------------|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $A \cdot 0 = 0$       | $A \cdot A = A$            | $\overline{\overline{A}} = A$                                                                             |
| $A + 0 = A$           | $A + A = A$                | $A \cdot (B + A) = A$                                                                                     |
| $A \cdot 1 = A$       | $A \cdot \overline{A} = 0$ | $A \cdot B + A = A$                                                                                       |
| $A + 1 = 1$           | $A + \overline{A} = 1$     | $A + A \cdot B + A \cdot B \cdot C = A$<br>$A \cdot A + B \cdot A + B + C = A$                            |
| Abszorpciós tételek   |                            |                                                                                                           |
| De Morgan azonosságok |                            | $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ |

11. ábra. Azonosságok és alaptételek a logikai algebrában

## A LOGIKAI FÜGGVÉNYEK EGYSZERŰSÍTÉSE, REALIZÁLÁSA

A logikai függvények egyszerűsítéséhez az alapszabályokon, azonosságokon és alaptételeken kívül a függvények igazságtáblázatai is felhasználhatók.

A logikai alapfüggvények diszkrét áramköri elemek (ellenállások, jelfogók, izzólámpák, kapcsolók, diódák, tranzisztorok), illetve kapuáramkörök felhasználásával realizálhatók.

## 1. Boole–algebrai egyszerűsítések

Logikai azonosságok igazolására, logikai függvények egyszerűsítésére többféle eljárás alkalmazható. Az egyszerűsítések legalapvetőbb célja a logikai függvények a lehető legkevesebb számú áramköri elemmel történő megvalósítása.

Léteznek szisztematikus (módszeres) egyszerűsítési eljárások, melyek alkalmazása mechanikussá teszi az egyszerűsítést, s biztosan a logikai függvény legegyszerűbb formájához vezetnek. Ez a fejezet a legkönnyebb egyszerűsítést, a Boole–algebrai eljárást tartalmazza, mely a megismert alapszabályok és alaptételek segítségével valósítható meg.

A műszaki gyakorlatban alkalmazott egyszerűsítési módszerek:

**1. módszer:** a logikai függvény egyszerűsítéséhez alapszabályokat és alaptételeket alkalmazunk. Pl. háromváltozós logikai függvény egyszerűsítése:

$$F^3 = \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}$$

A következő tételeket alkalmazhatjuk:

- \_  $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$
- \_  $A + \bar{A} = 1$
- \_  $A \cdot 1 = A$

Az egyszerűsítés folyamata:

$$F^3 = \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} = A \cdot \bar{B} \cdot (C + \bar{C}) = A \cdot \bar{B} \cdot 1 = \underline{\underline{A \cdot \bar{B}}}$$

**2. módszer:** a logikai függvény felírása igazságtáblázatból történik. Pl. írjuk fel a 12. ábrán látható igazságtáblázatból a háromváltozós függvényt és végezzük el az egyszerűsítést.

| A | B | C | $Y^3$ |
|---|---|---|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0     |
| 0 | 0 | 1 | 1     |
| 0 | 1 | 0 | 1     |
| 0 | 1 | 1 | 1     |
| 1 | 0 | 0 | 0     |
| 1 | 0 | 1 | 0     |
| 1 | 1 | 0 | 1     |
| 1 | 1 | 1 | 0     |

12. ábra. Egy logikai függvény igazságtáblázata

A megadott táblázatból felírható logikai függvény:

$$F^3 = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot \bar{C}$$

Az egyszerűsítés lépései:

$$F^3 = \bar{A} \cdot C \cdot (B + \bar{B}) + B \cdot \bar{C} \cdot (A + \bar{A}) = \bar{A} \cdot C \cdot 1 + B \cdot \bar{C} \cdot 1$$

Az egyszerűsítés végeredménye:

$$F^3 = \bar{A} \cdot C + B \cdot \bar{C}$$

**3. módszer:** logikai algebrai azonosság igazolása igazságtáblázat segítségével. Pl.: az alábbi azonosságot igazoljuk egy részletezett igazságtáblával:

$$(A + \bar{B} \cdot \bar{C}) \cdot (\bar{A} + C) + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} = A \cdot C + \bar{A} \cdot \bar{C}$$

A megoldás menete:

Először felrajzoljuk az azonosság szerkezetéhez alkalmazkodó igazságtáblát. Ezután a 3 bemeneti változó (A, B, C) oszlopaiban kitöltjük a 8 kombinációt, majd a vizsgált azonosság bal- és jobb oldalának term-oszlopainak igazságáról nyilatkozunk. Végül kitöltjük a táblázat két főoszlopát. Mivel a két főoszlop igazságértéke megegyezik, az azonosság igazolása megtörtént. Ezek a folyamatok a 13. ábrán végigkövethetőek.

| A | B | C |  | $(A+B\cdot\bar{C})$ | $(\bar{A}+C)$ | $(\bar{A}\cdot B\cdot\bar{C})$ | Az azonosság<br>bal oldala | $(A\cdot C)$ | $(\bar{A}\cdot\bar{C})$ | Az azonosság<br>jobb oldala |
|---|---|---|--|---------------------|---------------|--------------------------------|----------------------------|--------------|-------------------------|-----------------------------|
| 0 | 0 | 0 |  | 1                   | 1             | 0                              | 1                          | 0            | 1                       | 1                           |
| 0 | 0 | 1 |  | 0                   | 1             | 0                              | 0                          | 0            | 0                       | 0                           |
| 0 | 1 | 0 |  | 0                   | 1             | 1                              | 1                          | 0            | 1                       | 1                           |
| 0 | 1 | 1 |  | 0                   | 1             | 0                              | 0                          | 0            | 0                       | 0                           |
| 1 | 0 | 0 |  | 1                   | 0             | 0                              | 0                          | 0            | 0                       | 0                           |
| 1 | 0 | 1 |  | 1                   | 0             | 0                              | 1                          | 1            | 0                       | 1                           |
| 1 | 1 | 0 |  | 1                   | 1             | 0                              | 0                          | 0            | 0                       | 0                           |
| 1 | 1 | 1 |  | 1                   | 1             | 0                              | 1                          | 1            | 0                       | 1                           |



13. ábra. A logikai azonosság igazolásához készített igazságtáblázat

## 2. Logikai függvények realizálása kapuáramkörökkel

A logikai függvények és azok egyszerűsített változatának realizálásához legalkalmasabb módszer a kapuáramkörök alkalmazása. Minden logikai függvény megvalósítható logikai kapuk összekapcsolásával.

**Logikai művelet:** logikai eljárás, melyeknél az eredmények logikai értéke csak a komponensek logikai értékétől függ. Egy kijelentés logikai értéke lehet **Igaz** vagy **Hamis**.

**Logikai kapu:** a legalapvetőbb logikai műveletek megvalósítására szolgáló áramköri elem. A jel feldolgozás legkisebb kétállapotú (bistabil) kapcsolóeleme. Egy nyitott kapcsoló 0, egy zárt kapcsoló 1 állapotot jelent. Az állapotokat digitális áramkörökben félvezető kapuáramkörök realizálják.

Leggyakrabban alkalmazott logikai kapuk: **NEM (INVERTER)**, **ÉS (AND)**, **VAGY (OR)**, **VAGY-NEM (NOR)**, **ÉS-NEM (NAND)**.

A legalapvetőbb logikai kapuk rajzjele és igazságtáblázata a 14–15–16–17–18. ábrákon megtalálható.

|                |                                                                                                               |
|----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| NEM (INVERTER) |  $A \rightarrow Y = \bar{A}$ |
| Bemenet<br>A   | Kimenet<br>Y                                                                                                  |
| 0              | 1                                                                                                             |
| 1              | 0                                                                                                             |

14. ábra. NEM logikai kapu (inverter)

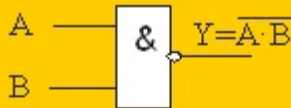
|           |   |                                                                                |
|-----------|---|--------------------------------------------------------------------------------|
| ÉS (AND)  |   | <div><div>A</div><div>B</div><div><div>&amp;</div><div>Y=A·B</div></div></div> |
| Bemenetek |   | Kimenet                                                                        |
| A         | B | Y                                                                              |
| 0         | 0 | 0                                                                              |
| 0         | 1 | 0                                                                              |
| 1         | 0 | 0                                                                              |
| 1         | 1 | 1                                                                              |

15. ábra. ÉS (AND) logikai kapu

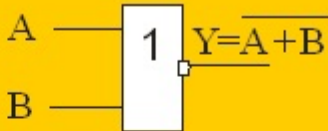
|           |   |                                                                 |
|-----------|---|-----------------------------------------------------------------|
| VAGY (OR) |   | <div><div>A</div><div>B</div><div>1</div><div>Y=A+B</div></div> |
| Bemenetek |   | Kimenet                                                         |
| A         | B | Y                                                               |
| 0         | 0 | 0                                                               |
| 0         | 1 | 1                                                               |
| 1         | 0 | 1                                                               |
| 1         | 1 | 1                                                               |

16. ábra. VAGY (OR) logikai kapu



|                      |          |                                                                                    |
|----------------------|----------|------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>ÉS-NEM (NAND)</b> |          |  |
| <b>Bemenetek</b>     |          | <b>Kimenet</b>                                                                     |
| <b>A</b>             | <b>B</b> | <b>Y</b>                                                                           |
| 0                    | 0        | 1                                                                                  |
| 0                    | 1        | 1                                                                                  |
| 1                    | 0        | 1                                                                                  |
| 1                    | 1        | 0                                                                                  |

17. ábra. ÉS-NEM (NAND) logikai kapu

|                       |          |                                                                                    |
|-----------------------|----------|------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>VAGY-NEM (NOR)</b> |          |  |
| <b>Bemenetek</b>      |          | <b>Kimenet</b>                                                                     |
| <b>A</b>              | <b>B</b> | <b>Y</b>                                                                           |
| 0                     | 0        | 1                                                                                  |
| 0                     | 1        | 0                                                                                  |
| 1                     | 0        | 0                                                                                  |
| 1                     | 1        | 0                                                                                  |

18. ábra. VAGY-NEM (NOR) logikai kapu

**Logikai hálózatok:** logikai áramkörök megvalósítása logikai kapuáramkörök összekapcsolásával.

Fajtái:

- **Kombinációs hálózatok:** időfüggetlen logikai függvényeket realizálnak.
- **Sorrendi (szekvenciális) hálózatok:** időfüggő logikai függvényeket realizálnak.

A logikai hálózatok realizálásához az alapkapukon kívül 3, 4, 8 bemenetű logikai kapukat is alkalmaznak. További egyszerűsítést eredményez, ha különleges kapuáramköröket is felhasználnak. Ilyenek pl. az EKVIVALENCIA és az ANTIVALENCIA logikai függvényeket megvalósító logikai kapuk.

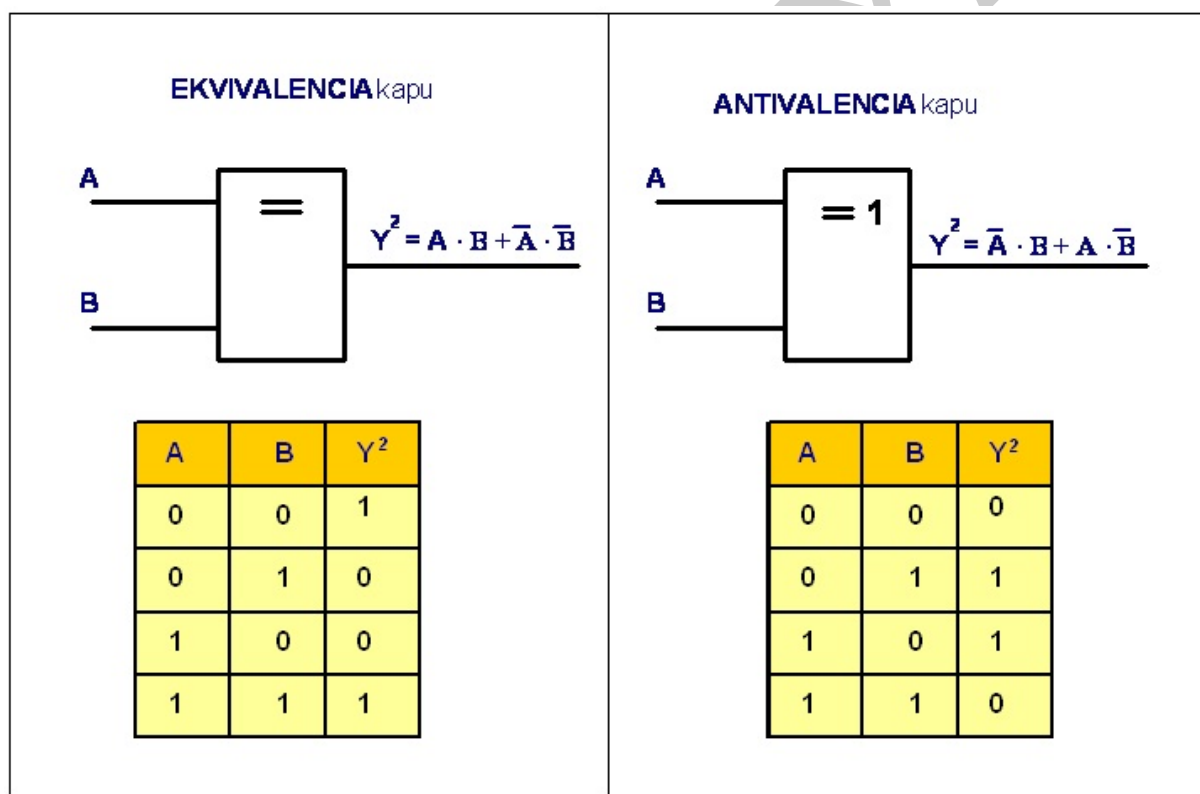
**EKVIVALENCIA** kapu logikai függvénye:

$$Y^2 = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B} = A \otimes B$$

**ANTIVALENCIA (KIZÁRÓ VAGY)** kapu logikai függvénye:

$$Y^2 = \bar{A} \cdot B + A \cdot \bar{B} = A \oplus B$$

A két különleges kapuáramkör jelképe és igazságtáblázata a 19. ábrán látható.

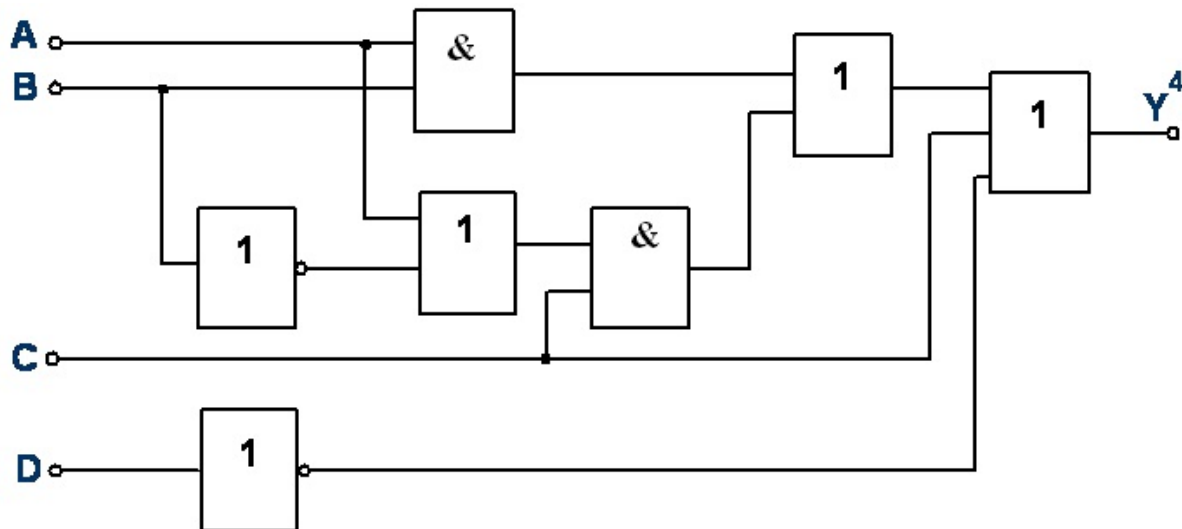


19. ábra. Különleges kapuáramkörök

Az alábbiakban a rendelkezésre álló kapuáramkörök segítségével realizálunk egy négyváltozós logikai függvényt. A megvalósítandó függvény:

$$F^4 = [(A + \bar{B}) \cdot C + A \cdot B] + C + \bar{D}$$

A logikai függvény algebrai alakja elárulja, hogy a megvalósításhoz 2 db **INVERTER**, 3 db **VAGY** kapu és 2 db **ÉS** kapu szükséges. A logikai függvény szerkezetét követve megrajzoljuk az összekapcsolt kapuáramkörök ábráját, s feltüntetjük a független változókat (**A**, **B**, **C**, **D**), valamint a függő változót (**Y<sup>4</sup>**). A 20. ábra szemlélteti a megoldást.



20. ábra. Logikai függvény realizálása logikai kapukkal

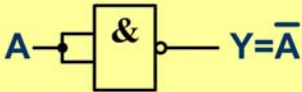
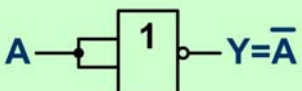
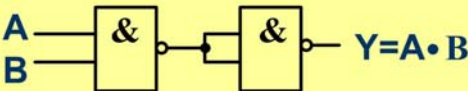
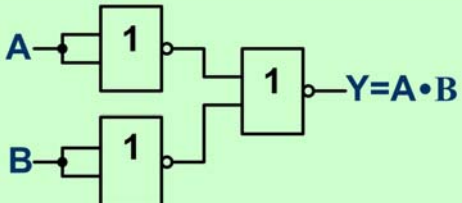
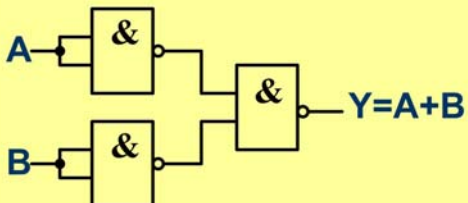
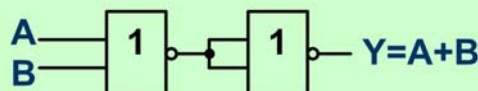
A funkcionálisan teljes rendszerek logikai függvények megvalósítására szolgáló, adott műveletek, illetve kapuáramkörök alkalmazását megengedő szisztémák. Fajtái:

**NEM-ÉS-VAGY (N-É-V) rendszer:** a logikai függvény realizálását tetszőleges kombinációjú INVERTER, ÉS, VAGY kapuk alkalmazásával engedélyezi.

**NAND rendszer:** a logikai függvény kizárólag NAND kapuk tetszőleges kombinációival valósítható meg.

**NOR rendszer:** a logikai függvény kizárólag NOR kapuk tetszőleges kombinációival valósítható meg.

A funkcionálisan teljes rendszerek közül a NAND és a NOR rendszer az előnyösebb, mivel a logikai függvények realizálására csak egyféle kaput alkalmaz. A N-É-V rendszer mindhárom alkotó eleme megvalósítható NAND, illetve NOR kapukkal. A 21. ábra bemutatja a N-É-V rendszer alap kapuinak kapcsolatát a NAND és NOR rendszerekkel.

| LOGIKAI ALAPMŰVELET | LOGIKAI RENDSZER                                                                  |                                                                                    |
|---------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
|                     | NAND RENDSZER                                                                     | NOR RENDSZER                                                                       |
| NEM                 |  |  |
| ÉS                  |  |  |
| VAGY                |  |  |

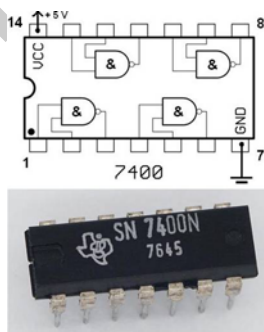
21. ábra. A funkcionálisan teljes rendszerek kapcsolata

A N-É-V rendszerből a De Morgan azonosságok alkalmazásával, logikai átalakításokkal juthatunk el a NAND- és a NOR rendszerhez. A 22. ábra logikai algebrai azonosságok segítségével összefoglalja az alapl műveletek megvalósítását.

| NAND RENDSZER |                                                                                               |                                                  |
|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| NEM művelet   | $Y = \overline{A \cdot A} = \overline{A} + \overline{A} = \overline{A}$                       | Az ÉS művelet 1 db NAND kapuval megvalósítható.  |
| ÉS művelet    | $Y = \overline{\overline{A \cdot B}} = A \cdot B$                                             | Az ÉS művelet 2 db NAND kapuval megvalósítható.  |
| VAGY művelet  | $Y = \overline{\overline{A \cdot B}} = \overline{A} + \overline{B}$                           | A VAGY művelet 3 db NAND kapuval megvalósítható. |
| NOR RENDSZER  |                                                                                               |                                                  |
| NEM művelet   | $Y = \overline{\overline{A} + \overline{B}} = A \cdot B$                                      | Az ÉS művelet 1 db NOR kapuval megvalósítható.   |
| ÉS művelet    | $Y = \overline{\overline{A} + \overline{B}} = A + B$                                          | Az ÉS művelet 3 db NOR kapuval megvalósítható.   |
| VAGY művelet  | $Y = \overline{\overline{A} + \overline{A}} = \overline{A} \cdot \overline{A} = \overline{A}$ | A VAGY művelet 2 db NAND kapuval megvalósítható. |

22. ábra. Az alpműveletek megvalósítása NAND és NOR rendszerben

Kiegészítésül a 23. és 24. ábrán egy 4 kapus integráltáramkör gyakorlati megoldása, valamint egy friss logikai kapukat tartalmazó katalógus címlapja szerepel.

23. ábra. SN 7400 4 db NAND kapus mikrochip a gyakorlatban<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Forrás: <http://www.wikipedia.org>

# Logic Guide



[www.ti.com/](http://www.ti.com/)

3Q 2009

24. ábra. A logikai áramkörök egyik katalógusának előlapja<sup>3</sup>

Összefoglalás

<sup>3</sup> Forrás: <http://focus.ti.com>



Az esetfelvetés kapcsán kiderült, hogy munkahelyén a laboratóriumot átállítják logikai áramkörök vizsgálatára. A felettesétől kapott utasítás szerint frissen belépett munkatársait kellett szakmai információkkal ellátnia a logikai algebra alapfogalmaihoz kapcsolódó ismeretekről. Az információ átadás rövid bevezetővel kezdődött, melyben hangsúlyozásra kerültek a Boole-algebra alapfogalmai, a kétértékű, igaz-hamis tényállásokat matematikai nyelven megfogalmazó módszerek.

A logikai függvények bevezetőjében bemutatásra kerültek a függő- és független változók közötti függvénykapcsolatok lehetőségei, valamint a szabványos jelölések.

Munkatársai részletesen megismerhették a logikai függvények leírási módjait. Külön-külön ismertetésre kerültek a szöveges-, a táblázatos, a logikai vázlatos, a halmazos, az algebrai- és a grafikus leírási megoldások. Utóbbinál előtérbe került a Veitch-tábla és a Karnaugh-tábla gyakorlati jelentősége.

A logikai algebra alapszabályai kapcsán kiderült a kommutativitás, az asszociativitás és a disztributivitás lényege. Külön táblázatba kerültek a legalapvetőbb logikai alaptételek, s külön ismertetésre került a Duál-tétel és a De Morgan azonosság.

Alapfeladatokon keresztül sikerült megismerni a logikai függvények egyszerűsítési módszereit. Az egyszerűsítési eljárásoknál előtérbe kerültek a logikai függvények alapszabályai, azonosságai és alaptételei, valamint az igazságtáblázatok.

A legalapvetőbb logikai kapuáramkörök bemutatása igazságtáblázattal és szabványos jelölések alkalmazásával történt. A funkcionálisan teljes rendszerek (N-É-V, NAND, NOR) definiálása után sor került a logikai függvények kapuáramkörökkel történő megvalósítására.

## TANULÁSIRÁNYÍTÓ

A logikai algebra alapjai, logikai függvényeket tárgyaló témakörhöz tartozó ismeretek gyakorlati alkalmazásához az írott szakmai szöveg megértése készség fejlesztése szükséges.

A témakörhöz tartozó ismeretek gyakorlati alkalmazásához a gyakorlatias feladatértelmezés módszer kompetencia fejlesztése szükséges.

A szakmai szöveg alapos tanulmányozása és feldolgozása után célszerű az alábbi feladatok megoldása.

1. feladat: Ábrák, függvények készítésével mutassa be az alábbi logikai algebrai alapfogalmakat!

- digitális leképezés
- logikai függvény
- igazságtáblázat

2. feladat: Milyen módszerek alkalmazhatók a logikai függvények leírására? Mindegyik módszerhez készítsen magyarázó vázlatot!

3. feladat: Írja fel az alábbi alpműveletek logikai algebrai alakját és rajzolja fel igazságtáblázatukat!

- ÉS (AND)
- VAGY (OR)
- ÉS NEM (NAND)
- VAGY NEM (NOR)

4. feladat: A logikai algebra jelöléseivel írja fel a kommutatív-, az asszociatív- és a disztributív-szabályt!

5. feladat: Logikai algebrai műveletsorral igazolja a Duál-tételt és a De Morgan azonosságokat!

6. feladat: Igazságtáblázat segítségével bizonyítsa be a De Morgan azonosságokat!

7. feladat: Egy háromváltozós logikai függvény átalakításaival szemléltesse a logikai függvények Boole-algebrai egyszerűsítési eljárásának célját és lényegét!

8. feladat: A funkcionálisan teljes logikai rendszerek közötti kapcsolatok segítségével valósítsa meg NAND- és NOR-rendszerben a NEM, az ÉS, valamint a VAGY kapcsolatot!

9. feladat: Boole-algebrai módszerrel egyszerűsítse a következő háromváltozós logikai függvényt!

$$F^3 = (A + \bar{B} + \bar{C}) \cdot (B + \bar{C}) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})$$

10. feladat: Hány db és milyen funkciójú kapuáramkörrel valósítható meg a 9. feladat logikai függvénye N-É-V-, NAND- és NOR-rendszerben? Állításait bizonyítsa be!

## ÖNELLENŐRZŐ FELADATOK

## 1. feladat

Logikai függvény felírása és egyszerűsítése

a) Írja fel a mellékelt igazságtáblázatból a négyváltozós logikai függvényt!

| A | B | C | D | $Y^4$ |
|---|---|---|---|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1     |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1     |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0     |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0     |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1     |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1     |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0     |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0     |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0     |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0     |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0     |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0     |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0     |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0     |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1     |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1     |

$Y^4 =$

b) Valósítsa meg a felírt függvényt N-É-V rendszerben úgy, hogy összesen 5 db logikai kaput használhat!

$Y^4 =$

**2. feladat**Logikai azonosság bizonyításaa) Igazságtáblázat segítségével bizonyítsa be, hogy a következő azonosság igaz!

$$(A + B + C) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + C) \cdot (\overline{B} + \overline{C}) = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}} + A \cdot B \cdot \overline{C} + B \cdot C$$

a) Az igazságtáblázat elkészítése:

b) Végezze el a bizonyítást a De Morgan azonosság többszöri alkalmazásával!

$$(A + B + C) \cdot (\bar{A} + \bar{B} + C) \cdot (\bar{B} + \bar{C}) = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot \bar{C} + B \cdot C$$

c) Hány db és milyen logikai funkciójú kapuáramkörökkel tudná az eredeti azonosság mindkét oldalán található logikai függvényeket megvalósítani?

### 3. feladat

Logikai függvény egyszerűsítése és realizálása

a) Algebrai módszerrel egyszerűsítse az alábbi háromváltozós logikai függvényt!

$$Y^3 = \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C$$

$$Y^3 = \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C =$$

b) Logikai kapuk alkalmazásával valósítsa meg N-É-V rendszerben az eredeti és az egyszerűsített függvényt!

A large empty rectangular box with a yellow border, intended for the student to draw a logic circuit implementation of the functions in an N-É-V (NAND-OR) system. A large, light gray watermark with the word 'MUNKADOLÓ' is oriented diagonally across the box.

c) Realizálja az egyszerűsített logikai függvényt NAND rendszerben!

A large empty rectangular box with a yellow border, intended for the student to draw a logic circuit implementation of the simplified function using only NAND gates in a NAND system. A large, light gray watermark with the word 'MUNKADOLÓ' is oriented diagonally across the box.

## MEGOLDÁSOK

## 1. feladat

Logikai függvény felírása és egyszerűsítése

a) Az igazságtáblázatból úgy írható fel a négyváltozós logikai függvény, hogy csak azokat a sorokat vesszük figyelembe, ahol a kimenet 1-es értékű:

$$Y^4 = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot D + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot D$$

b) A felírt függvényt a megadott feltételekkel úgy lehet megvalósítani, hogy a logikai szabályok és tételek segítségével egyszerűsíteni kell.

Az egyszerűsítés első lépése:

$$Y^4 = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot (D + \overline{D}) + A \cdot B \cdot \overline{C} \cdot (D + \overline{D}) + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \cdot (D + \overline{D})$$

Az egyszerűsítés második lépése:

$$Y^4 = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$$

Az egyszerűsítés harmadik lépése előtt látszik, hogy a függvény 3 változóssá egyszerűsödött.

Az egyszerűsítés harmadik lépése:

$$Y^4 = A \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot (\overline{B} + B) = A \cdot B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot \overline{C}$$

Az egyszerűsítés végeredményéből megállapítható, hogy a logikai függvény megvalósítható 2 db ÉS kapuval, 1 db VAGY kapuval és 2 db inverterrel, azaz 5 db kapuáramkörrel.

## 2. feladat

Logikai azonosság bizonyítása

a) Igazságtáblázat segítségével az azonosság bizonyítása. Az azonosság részelemeit kell az igazságtáblába beírni.

$$(A + B + C) \cdot (\overline{A} + \overline{B} + C) \cdot (\overline{B} + \overline{C}) = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}} \cdot \overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}} \cdot \overline{B \cdot C}$$

| A | B | C | $(A+B+C)$ | $(\overline{A}+\overline{B}+C)$ | $(\overline{B}+\overline{C})$ | Azonosság<br>bal oldala | $\overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}}$ | $\overline{\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}}$ | $B \cdot C$ | Azonosság<br>jobb oldala |
|---|---|---|-----------|---------------------------------|-------------------------------|-------------------------|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|-------------|--------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0         | 1                               | 1                             | 0                       | 1                                                               | 0                                                               | 0           | 0                        |



|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Mivel a két főoszlop igazságértéke megegyezik, az azonosság igazolása megtörtént.

b) A bizonyítás végrehajtása a De Morgan azonosság alkalmazásával. Célszerű az azonosság baloldali háromváltozós függvényét többszöri lépéssorozat segítségével addig alakítani, amíg létrejön a jobboldali logikai függvény.

$$(A+B+C) \cdot (\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}) \cdot (\bar{B}+\bar{C}) = \overline{\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}} \cdot \overline{A \cdot B \cdot C} \cdot \overline{B \cdot C} = \overline{\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}} + \overline{A \cdot B \cdot C} + \overline{B \cdot C}$$

A De Morgan azonosság kétszeres alkalmazásával az igazolás megtörtént.

c) A baloldali logikai függvény megvalósítható 3 db INVERTER, 3 db VAGY kapu és 1 db ÉS kapu segítségével.

A jobboldali logikai függvény megvalósításához 3 db inverter, 3 db ÉS kapu és 1 db NOR kapu szükséges.

### 3. feladat

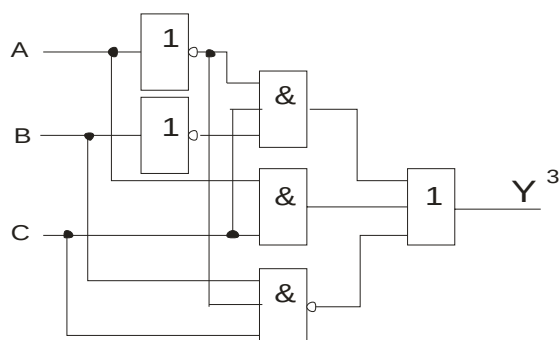
#### Logikai függvény egyszerűsítése és realizálása

a) Algebrai módszerrel a háromváltozós logikai függvény több lépéses egyszerűsítése:

$$\begin{aligned} Y^3 &= \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C = \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + A \cdot B \cdot C = \\ &= \bar{A} \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot B \cdot C = \bar{A} \cdot B \cdot (C + \bar{C}) + B \cdot C \cdot (A + \bar{A}) = \\ &= \bar{A} \cdot B \cdot 1 + B \cdot C \cdot 1 = \bar{A} \cdot B + B \cdot C = B \cdot (\bar{A} + C) \end{aligned}$$

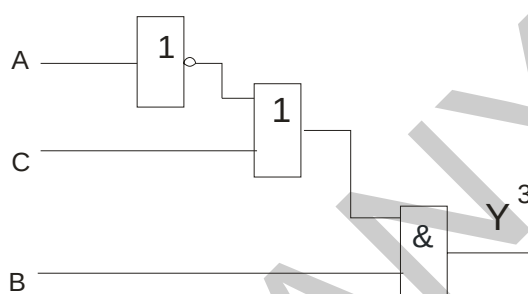
b) Logikai kapuk alkalmazásával N-É-V rendszerben az eredeti és az egyszerűsített függvény megvalósítása:

Az eredeti függvény realizálása:



25. ábra

Az egyszerűsített függvény realizálása:



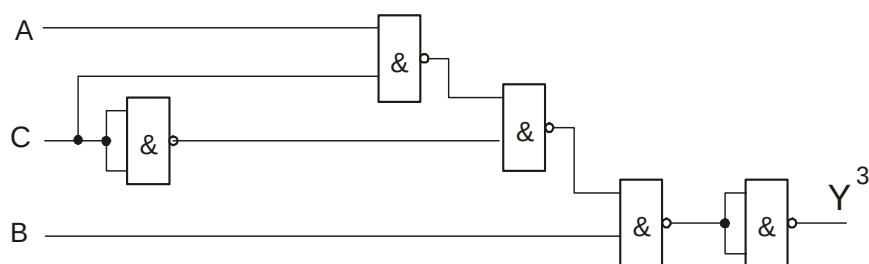
26. ábra

c) Az egyszerűsített függvény megvalósítása NAND rendszerben:

A megvalósításhoz az egyszerűsített logikai függvény algebrai átalakítása szükséges, melyhez a De Morgan azonosság alkalmazása vezet:

$$Y^3 = B \cdot (\overline{\overline{A + C}}) = B \cdot A \cdot C$$

Az átalakított függvény 5db NAND kapu összekapcsolásával megvalósítható:



27. ábra

## IRODALOMJEGYZÉK

### FELHASZNÁLT IRODALOM

Kovács Csongor: A digitális elektronika alapjai, General Press Kiadó, 2006.

Zombori Béla: Digitális elektronika, Tankönyvmester Kiadó, 2006.

Zombori Béla: Elektronikai feladatgyűjtemény, Tankönyvmester Kiadó, 2008.

Horváth Ernő: Elektronika feladatgyűjtemény II., Okker Oktatási Iroda, 1995.

### AJÁNLOTT IRODALOM

U. Tietze – Ch. Scenk: Analóg és digitális áramkörök, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1990.

Orgoványi József – Pszota József: Digitális technika, Tankönyvmester Kiadó, 2000.

A(z) 0917-06 modul 016-os szakmai tankönyvi tartalomeleme  
felhasználható az alábbi szakképesítésekhez:

| A szakképesítés OKJ azonosító száma: | A szakképesítés megnevezése |
|--------------------------------------|-----------------------------|
| 54 523 01 0000 00 00                 | Elektronikai technikus      |

A szakmai tankönyvi tartalomelem feldolgozásához ajánlott óraszám:  
13 óra

MUNKANYAG

MUNKANYAG

A kiadvány az Új Magyarország Fejlesztési Terv  
TÁMOP 2.2.1 08/1–2008–0002 „A képzés minőségének és tartalmának  
fejlesztése” keretében készült.

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap  
társfinanszírozásával valósul meg.

Kiadja a Nemzeti Szakképzési és Felnőttképzési Intézet  
1085 Budapest, Baross u. 52.

Telefon: (1) 210–1065, Fax: (1) 210–1063

Felelős kiadó:  
Nagy László főigazgató