



Csepcsényi Lajos Lászlóné Balogh Melinda

Egyensúlyi feltételek, reakcióerők számítása

NSZFI
NEMZETI SZAKKÉPZÉSI
ÉS FELNŐTTKÉPZÉSI INTÉZET

A követelménymodul megnevezése:
Építőipari kivitelezés tervezése

A követelménymodul száma: 0688-06 A tartalelem azonosító száma és célcsoportja: SzT-004-50

EGYENSÚLYI FELTÉTELEK, REAKCIÓERŐK SZÁMÍTÁSA

ESETFELVETÉS – MUNKAHELYZET

Az épületek tervezése és kivitelezése az egyik alapvetőbb emberi szükségletet elégíti ki. Ez a szükséglet az olyan terek kialakítása iránti igény, amely védelmet nyújt a természeti hatások ellen, esztétikus és a belső terek kialakításában is megfelel az épület funkciójának.

Az épületekkel szembeni legalapvetőbb követelmény, hogy az épületre ható erők állandóan egyensúlyban legyenek, valamint az épület és annak részei ne mozduljanak el, ne károsodjanak – a rájuk ható erőhatásokat biztonsággal viseljék – ezáltal biztosítva a biztonságos használatot és az épület hosszú fennmaradását. Emellett olyan szerkezeteket kell tervezni, amelyek nemcsak képesek az erőfelvételre, de azok kialakítása gazdaságos is. Az épületben a fellépő erőket valamilyen módon egyensúlyozni kell, olyan szerkezeti elemeket kell kialakítani, amely képes a rá nehezedő terheket és az épület funkciójából adódó dinamikus terheket viselni, annak hatásainak ellenállni. Az erők egyensúlyozásának sokrétűségét az alábbi problémafelvetés mutatja be.

Ön egy tervezőiroda munkatársa, amely többszintes épületek tervezésével foglalkozik. Az Ön feladata az, hogy határozza meg az épületre ható erőket, a szerkezeti elemek súlyából adódó erőket, majd az erőhatásokat modellezze. Az épületre ható erőket egyensúlyozza, valamint méretezze a szerkezeti elemeket, amelyek a rá ható erőket viselni képesek, az erőket át tudják adni más szerkezeti elemeknek. Végezze el a méretezés előkészítéseként a szerkezeti elemekre ható erők egyensúlyozását, figyelembe véve a kialakítandó szerkezet geometriáját, tulajdonságait.

Az ilyen típusú feladatok megoldása a statikai számítások elsődleges célja: az egyensúly vizsgálata. Először meg kell határoznunk az erőrendszert, azt modelleznünk kell ügyelve a tervezett vagy ellenőrizendő épületszerkezet struktúrájára. A következőkben megvizsgáljuk, hogy egy síkbeli erőrendszert milyen módon lehet egyensúlyozni, az egyensúlyozásnál milyen feltételezésekkel élünk és mely változatát kell egyes esetekben alkalmazni. Megvizsgáljuk, hogy az egyes épületszerkezeti elemek esetében az egyensúlyozás hogyan történik.

SZAKMAI INFORMÁCIÓTARTALOM

SÍKBELI ERŐRENDSZER JELLEMZŐI ÉS EGYENSÚLYOZÁSA

Két vagy több erő együttesét erőrendszernek nevezzük. Ha a testre ható erők közös síkban működnek, akkor síkbeli erőrendszerről beszélünk, ha viszont az erőrendszer erőinek hatásvonalaira nem lehet közös síkot fektetni, akkor térbeli erőrendszerrel állunk szemben. Sok esetben a könnyebb kezelhetőség miatt a térbeli erőrendszert egy síkbeli erőrendszerrel helyettesítjük, modellezzük. A síkbeli erőrendszert alkotják koncentrált erők, vonalmentén ható erők vagy ezek összessége.

A síkbeli erőrendszert helyettesíthetjük egyetlen erővel is, ekkor az erőrendszer eredőerejéről beszélünk. Azt, hogy az erőrendszer egyensúlyozásánál szükség van-e az eredőerő kiszámítására mindig a konkrét feladat megoldásánál kell eldöntenünk. Az egyensúlyozás módját az alapján választjuk ki, hogy milyen az épületszerkezet kialakítása, mely szerkezeti elemek milyen irányú erőket képesek felvenni. Az egyensúlyozás alapján van lehetőségünk arra, hogy a későbbiekben a szerkezeti elemek méreteit kialakítsuk úgy, hogy megfelelő teherbírással rendelkezzenek az erők felvételéhez.

Egy síkbeli erőrendszer egyensúlyáról akkor beszélünk, ha az erőrendszer bármely tengelyre képezett vetületösszege és bármely pontra felírt nyomatékösszege zérus. Adott általános erőrendszert – amely nincsen egyensúlyban – egyensúlyozni csak új egyensúlyozó erőhatásokkal tudunk. Egyensúlyozó erőhatások azok az erők és nyomatékok, amelyek az erőrendszerrel együtt az épületszerkezet nyugalmi állapotát létrehozzák. Egyenletekkel ezt a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

$$\sum X_i + X_E = 0$$

$$\sum Y_i + Y_E = 0$$

$$\sum M_{A_i} + M_{A_E} = 0$$

Az egyenletek felhasználásával az egyensúlyozó erőhatások számítása könnyen megoldható, és az eredmény egyértelmű mindaddig, amíg a számítandó erőhatások száma megegyezik az egyensúlyi egyenletek számával. Az egyenleteket a statika három egyensúlyi feltételeinek is nevezzük. Az egyensúlyozást megoldhatjuk szerkesztéssel is. Ekkor az egyensúlyban lévő erőrendszerrel mind a vektorábra, mind a kötélpoligon zárt, vagyis a kötélpoligon első és utolsó oldala egy egyenesbe esik. Ezenkívül a szerkesztéskor ügyelni kell a nyílfolytonosságra is.

1. Síkbeli erőrendszer egyensúlyozása egyetlen erővel

A síkbeli erőrendszer egyensúlyozása és az eredőerő között szoros kapcsolat van. Mivel az eredőerő a definíciójából adódóan az az erő, amely a síkbeli erőrendszert helyettesíti, ezért egyensúlyozáskor csak az eredőerőt kell egyensúlyozni, vagyis az eredőerőnek és az egyensúlyozó erőhatásnak kell egyensúlyban lennie. Felhasználjuk a statika első alaptételét, mely szerint két erő akkor és csakis akkor van egyensúlyban, ha egyenlő nagyságúak, azonos hatásvonalon működnek, de ellentétes irányúak. Vagyis az eredő egyensúlyozása úgy történik, hogy az egyensúlyozó erő az eredő hatásvonalán működik, nagysága az eredőerő nagyságával megegyezik, de iránya ellentétes a síkbeli erőrendszer eredőerejével. Másképpen úgy is megfogalmazhatjuk, úgy hogy az egyensúlyozó erő, az eredőerő ellentettje. Gyakorlati szempontból ez azt jelenti, hogy az egyensúlyozó erő számítása megegyezik az eredőerő számításával. A fentieket képletekkel az alábbi módon írhatjuk le.

$$\sum X_i = X_R$$

$$\sum Y_i = Y_R$$

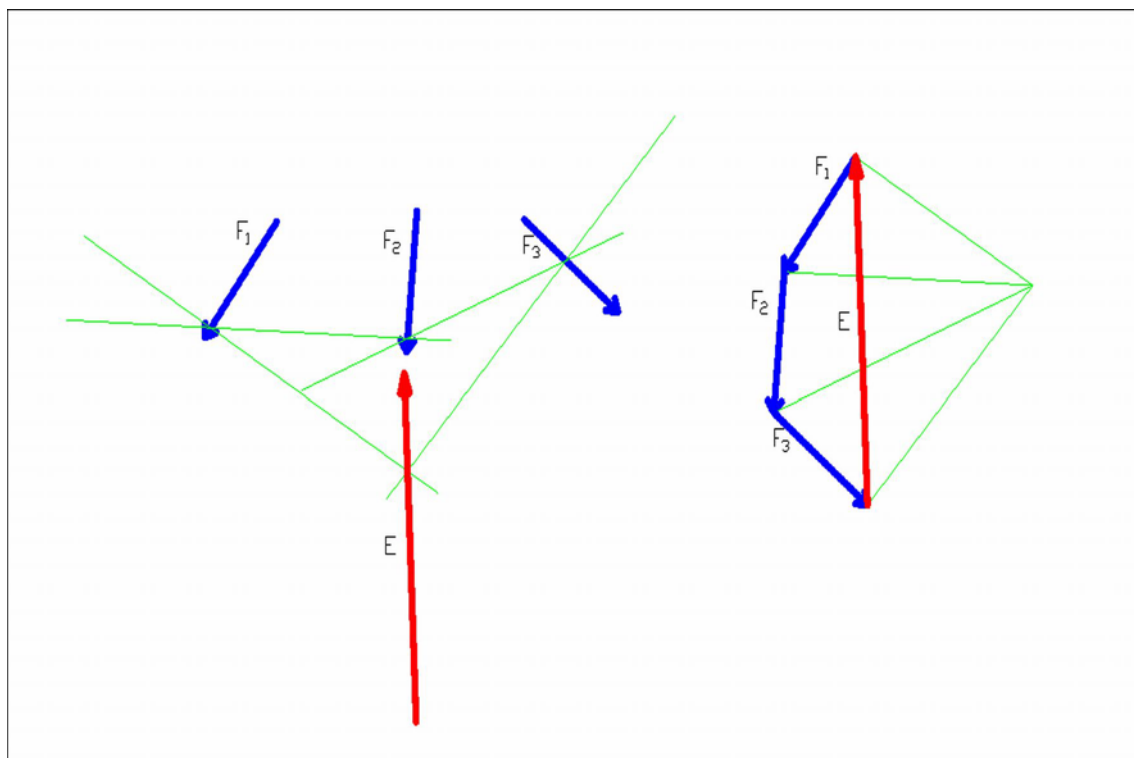
$$\sum M_{A_i} = M_{AR} \quad \text{egyenletekkel számítjuk ki az eredőerőt}$$

$$\sum X_i = -X_E$$

$$\sum Y_i = -Y_E$$

$$\sum M_{A_i} = -M_{AE} \quad \text{összefüggések vonatkoznak az egyensúlyozó erőre.}$$

Az egyensúlyozó erő szerkesztése is hasonló az eredőerőéhez. Ekkor az erőrendszer erőinek nyílfolytonos vektor-láncát itt nem nyílütköztetéssel, hanem nyílfolytonosan zárjuk be a keresett erő vektorával. A kötélpoligon szerkesztésben semmi eltérés nincs, az egyensúlyozó erőnek az elrendezési rajzon megszerkesztett hatásvonalán a nyílrányt természetesen a vektorábrákon meghatározott értelemben kell felvenni. A következő ábra az egy erővel történő egyensúlyozást mutatja be szerkesztéssel.



1. ábra. Egyensúlyozás egy erővel

Az 1. ábrán kék színnel jelölt síkbeli erőrendszer egyensúlyozó erejét kötélpolygon segítségével határoztuk meg. Az egyensúlyi erőt piros színnel ábrázoltuk, melynek nagysága megegyezik az eredő nagyságával, azonos hatásvonalon működik és iránya azzal ellentétes.

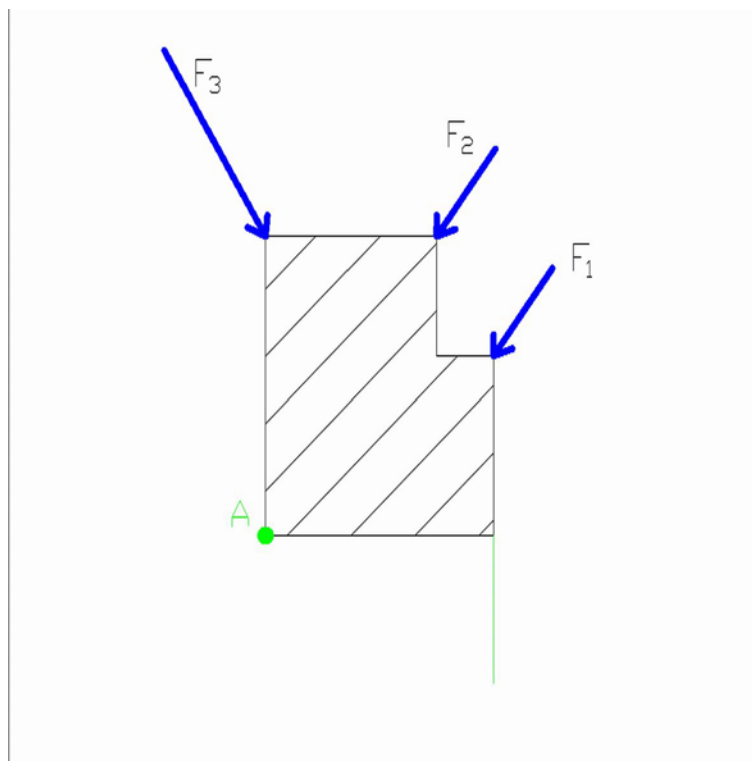
Egyes esetekben előfordulhat, hogy a síkbeli erőrendszert egy eredőerő hatásvonalára nem eső pontba egyensúlyozzuk. Ekkor az egyensúlyozó erő hatásvonalja egy tetszőleges A ponton megy keresztül. Az erő nagysága megegyezik az eredőerő nagyságával, iránya azzal ellentétes. Ezenkívül az A pontban keletkezik egy nyomaték is, amely az eredőerő és az A pont és az eredőerő hatásvonal távolságának szorzatával egyenlő.

2. Síkbeli erőrendszer egyensúlyozása két erővel

Síkbeli erőrendszernek két erővel való egyensúlyozása önmagában határozatlan feladat, mert két olyan erőt keresünk, amelyek az erőrendszerrel összegezve kielégítik a korábban ismertetett egyensúlyi feltételeket. Ha a két erőre nézve semmiféle kitéltet nem teszünk, akkor az egyiket tetszőlegesen felvéve meghatározhatunk egy olyan másik erőt, amellyel együtt a síkbeli erőrendszer egyensúlyi állapotba kerül. A feladat akkor válik határozott feladattá, ha a két keresett erőnek csak annyi jellemzőjét keressük, ahány egyenlet a rendelkezésünkre áll. Megkötéseket tehetünk az erő helyére, hatásvonalára és irányára. Mivel egy erőt három adat határoz meg, két erővel történő egyensúlyozáskor hat adatra van szükség. Ezzel szemben csak három egyensúlyi feltételt tudunk felírni, így három adatot a feladat megoldásakor előre fel kell vennünk. A gyakorlatban általában ki szokták jelölni minkét egyensúlyozó erő helyét és az egyik erő irányát úgy, hogy az egyensúlyozó erők csak a vizsgált szerkezet megtámasztási pontjaiban keletkezhetnek a támaszok kiképzésétől függő feltételekkel. A támasz lehet két erővel történő egyensúlyozáskor csukló, vagy olyan kialakítású, amely a támaszerő helyét és irányát is kijelöli. Ilyen támaszok lehetnek görgők, ingaoszlopok, és kötelek, valamint a befogás, amelyet konzoltartók esetében alkalmazunk és nyomaték felvételére is alkalmas.

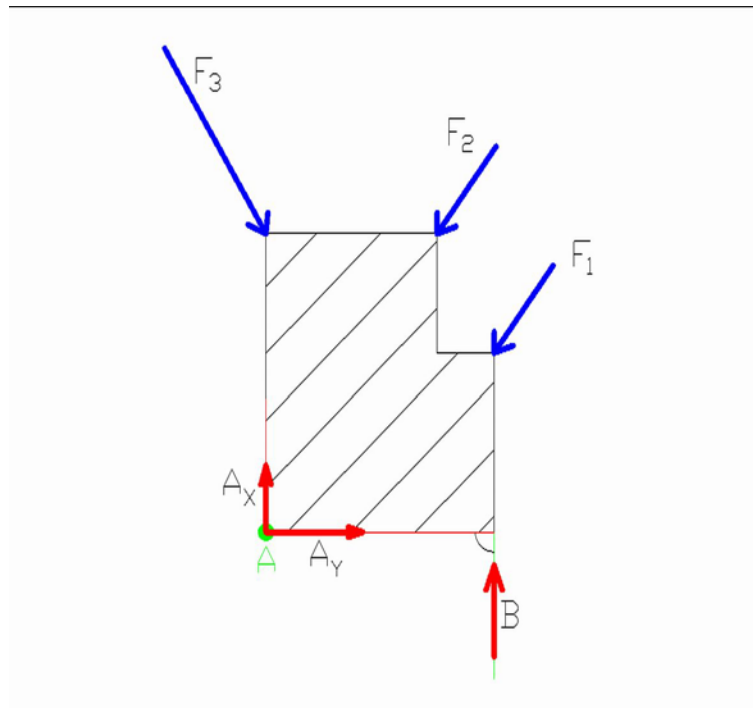
Kivételes esetben megadhatjuk mindkét egyensúlyozó erő helyét és irányát, feltéve, hogy a két adott hatásvonal az egyensúlyozandó síkbeli erőrendszer eredőjének hatásvonalán metszi egymást. Két erő ugyanis csak akkor tarthat egyensúlyban egy erőrendszert, ha a rendszer eredőjét is egyensúlyozni képes. A statika alaptételei alapján három erő egyensúlyának szükséges de nem elégséges feltétele a közös metszéspont.

A gyakorlatban a síkbeli erőrendszer két erővel történő egyensúlyozásakor a következő feltételek szerint járunk el: feltételezzük, hogy ismerjük az egyik egyensúlyozó erő hatásvonalán lévő A pontot, a másik egyensúlyozó erőnek pedig a hatásvonalát tételezzük fel ismertnek. Tekintsük a 2. ábrán lévő síkbeli erőrendszert. Feltételezzük, hogy az egyik egyensúlyozó erő átmegy az A ponton, a másik egyensúlyozó erő feltételezett hatásvonalát pedig zöld színnel jelöltük. Az erők irányának és hatásvonalának felvétele tapasztalati úton történik, ha rossz feltételezéssel élünk, akkor az a számítás során ellentmondásokhoz vezet. Ekkor a feltételezéseken módosítani kell.



2. ábra. Síkbeli erőrendszer egyensúlyozása két erővel

A számítás megkezdése előtt célszerű az erőket összetevőikre felbontani. Az ismeretlen A egyensúlyozó erőt is felbontjuk a B erő hatásvonalára merőleges és azzal párhuzamos összetevőire. A számításhoz az ábrán nyíllal jelöljük meg, milyen irányok esetén tekintjük az erőket pozitív értelműnek. Ha a számítás eredményeként az adott erőre negatív értéket kapunk, akkor jutunk a már említett ellentmondáshoz és a szóban forgó erő iránya az ábrán megjelölt nyíllal ellentétes.

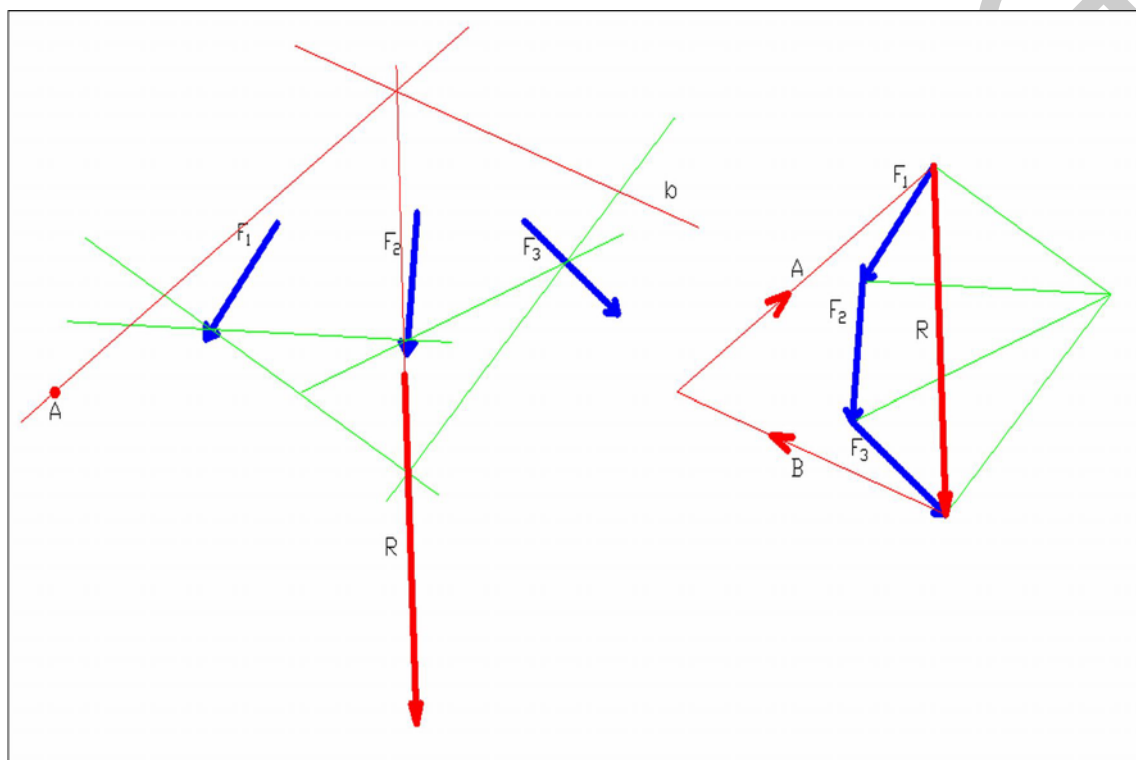


3. ábra. Az egyensúlyozó erők feltételezett iránya

Egy síkbeli erőrendszer akkor, és csakis akkor van egyensúlyban, ha bármely pontra felírt nyomaték értéke nulla. Írjuk fel az erőrendszer nyomatékát A pontra úgy, hogy a B erő feltételezett irányával és nagyságával is számolunk. Ekkor egy egyismeretlenes egyenlethez jutunk, amelyben az egyetlen ismeretlen a B erő nagysága. Ezután a még ismeretlen A_z erő összetevőinek nagysága is meghatározható az egyensúly két vetületi tételéből. Ezekben a tételekben az F erők összetevői szerepelnek ismert mennyiségekként, és meghatározandó – egyetlen ismeretlen – az A erő összetevője. Az A erő összetevőinek meghatározása után a már ismert összefüggéssel meghatározható az A erő nagysága és iránya is. Ezzel a síkbeli erőrendszer két egyensúlyozó erejét meghatároztuk.

A fent ismertetett számítási eljárásban egy nyomatéki és két vetületi egyenlet szerepel. Azonban az egyenlethármas más kombinációi is alkalmazhatók az egyensúlyozó erők kiszámításához. Felírhatunk két nyomatéki és egy vetületi egyenletet, ha a vetületi tengely nem merőleges a két nyomatéki pontot összekötő egyenesre, vagy három nyomatéki egyenletet, ha a nyomatéki pontok nem esnek egy egyenesre.

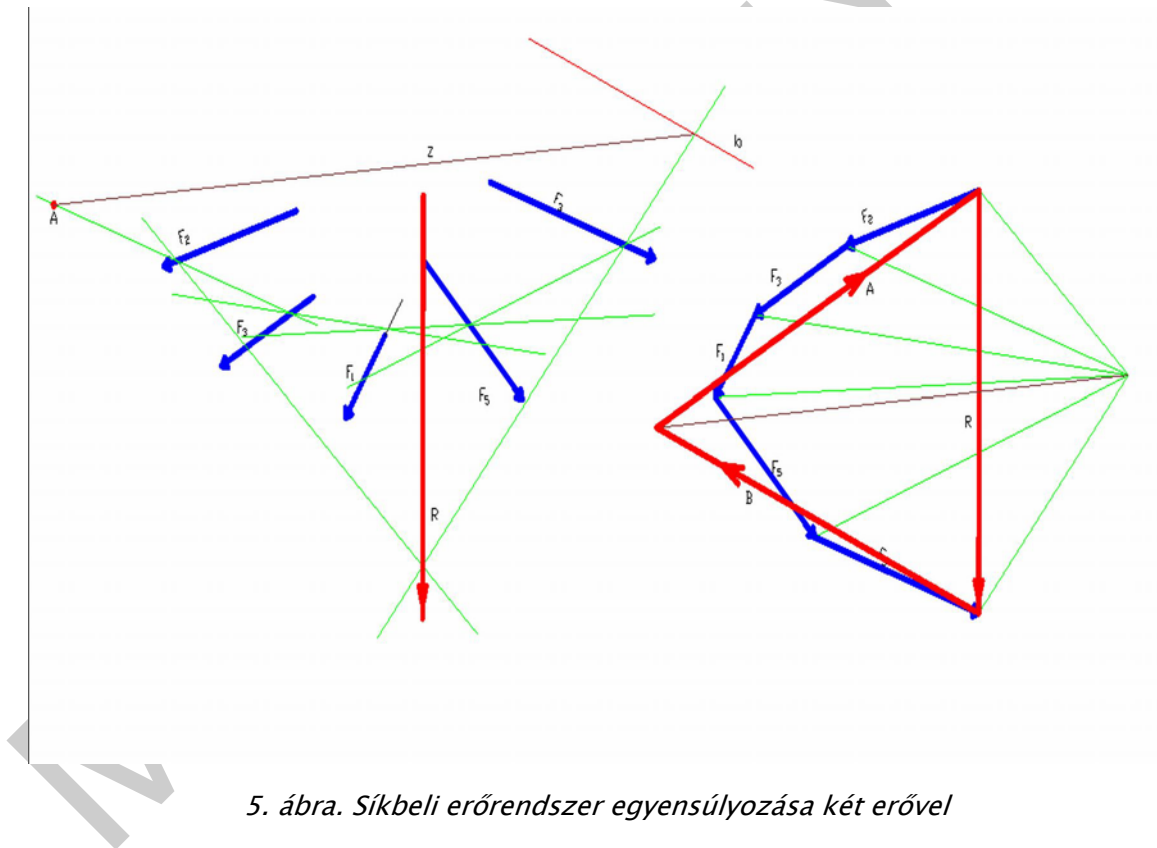
A síkbeli erőrendszer két egyensúlyozó erejét szerkesztési módszerekkel is meghatározhatjuk. Az egyszerűbb módszer esetében először meghatározzuk az erőrendszer eredőerejét, majd megkeressük hatásvonalának metszéspontját az ismert irányú egyensúlyozó erő hatásvonalával. A már ismertetett három erő egyensúlyának feltétele alapján az adott ponton átmenő erő hatásvonalát is az eredő és az egyik egyensúlyozó erő hatásvonalának metszéspontjába irányítjuk. Ezzel mindkét egyensúlyozó erő irány a rendelkezésünkre áll, párhuzamosokat kell szerkesztenünk velük az eredő vektor két végpontjából. A vektorháromszögben a nyilakat nyílfolytonosan kitéve, megkapjuk az egyensúlyozó erők nagyságát is. A módszert mutatja be a következő ábra:



4. ábra. Síkbeli erőrendszer egyensúlyozó erőinek meghatározása szerkesztéssel

Az ábrán a késsel jelzett erőrendszert kell egyensúlyoznunk két erővel (A és B erők). Feltételezzük, hogy az egyik egyensúlyozó erő az A ponton meg át, valamint felvettük a b hatásvonalat. Ezután kötélmódszer segítségével megszerkesztettük a három erő R eredőerejét a vektorábrán, majd visszaszerkesztettük a nézetábrára is. Ezzel meghatároztuk az eredőerő hatásvonalát, amely metszi a b hatásvonalat. Az A erő átmeny az A ponton és annak hatásvonalát az A pontra és a másik két erő hatásvonalának metszéspontjára esik. Ezzel meghatároztuk az egyensúlyozó erők irányát. Az így kapott a és a már meghatározott b hatásvonalat szerkesztjük vissza a vektorábrára, mely művelettel meg tudjuk határozni a két egyensúlyozó erő nagyságát is.

A síkbeli erőrendszer két egyensúlyozó erejének szerkesztésének másik módszere a kötélsozöget használja fel. Ha egy erőrendszer egyensúlyban van, akkor a vektoridom illetve a kötélpolygon egyaránt zárt. A szerkesztés folyamata a következő: először az erőrendszer vektorait egymás mellé mérjük nyílfolytonosan. A vektorlánc végéhez az adott hatásvonalú egyensúlyozó erővel párhuzamos egyenest illesztünk: ennek a lánc szabad végéhez csatlakozó, de még ismeretlen egyensúlyozó erő iránnyal való metszéspontja jelöli ki mindkét keresett egyensúlyozó erő vektorának nagyságát. Ezenkívül ebbe a pontba fut be a vektorábra egy segédereje is, mellyel húzott párhuzamos egyenes zárja be az elrendezési rajzon a kötélpolygont – záróoldal az ábrán z -vel jelölve. A kötéllábra szerkesztési szabályai itt is érvényesek. Az 5. ábrán látható A erő hatásvonalán az 1. kötéldoldalnak és a záróoldalnak metsződnie kell. Mivel az A erő hatásvonalának csak ez az egy pontja ismert, ezért az 1. kötéldoldt innen kell indítani, és a záróoldal szintén az A ponton kell, hogy átmenjen. A záróoldal elrendezési rajzon való megszerkesztése után, azzal párhuzamos egyenest kell rajzolnunk a vektorábrára. Ezzel kijelöljük a B erő nagyságát. Ezután az A erő vektora már egyértelműen szerkeszthető, mint a vektoridomot bezáró egyenes szakasz.



Látható, hogy az ábrán ugyan feltüntettük az eredőerőt, de annak meghatározása szükségtelen, az egyensúlyozó erők szerkesztésében nincsen szerepe.

3. Síkbeli erőrendszer egyensúlyozása három erővel

Ennél a feladattípusnál szintén az egyensúlyi egyenleteket kell felhasználnunk, de ebben az esetben három erővel egyensúlyozzuk a síkbeli erőrendszert. A három egyensúlyozó erő összesen kilenc jellemző adattal rendelkezik, de még mindig csak három egyensúlyi egyenlet áll rendelkezésünkre. Ha így szeretnénk megoldani a feladatot, akkor az határozatlan lenne és nem kapnánk egyértelmű megoldást. Az egyszerűség kedvéért a három egyensúlyozó erő esetében hat feltételt kell szabnunk. Ezek a legtöbbször az egyensúlyozó erők helyére és irányára vonatkoznak, így az egyensúlyi egyenletekben csak az egyensúlyozó erők nagysága szerepel ismeretlenként, ezzel a feladat határozottá válik. Természetesen élhetünk a feltételezések más kombinációjával is: kereshetjük az egyensúlyi erők helyét, vagy irányát, esetleg minden egyensúlyozó erőre más-más kombinációjú feltételeket adunk meg. A feltételek felvétele mindig függ a feladat típusától, a modellezendő épületszerkezettől és a tervezett terhelésektől.

A gyakorlatban az az eset a legelterjedtebb, amikor előre – tapasztalati úton – meghatározzuk az egyensúlyozó erők helyét és irányát. Az irányokat a rajzon nyilakkal jelöljük. Ha a számítás során az erőknél pozitív értéket kapunk, akkor az azt jelenti, hogy jól tételeztük fel az erő irányát, ha viszont negatív eredményhez jutunk, akkor a feltételezésünk rossz, és az erő irányát meg kell fordítanunk. Ezenkívül teljesülnie kell annak a feltételnek is, hogy az egyensúlyozó erők hatásvonalai nem egy pontban metszik egymást, különben a feladat ekkor is határozatlan lenne. A három egyensúlyozó erő közül kettőt kiválasztva azok hatásvonalainak metszéspontjára felírjuk a nyomatéki egyenletet, mely szerint egy erőrendszer akkor van egyensúlyban, ha bármely pontra felírt nyomaték nullával egyenlő. Ezt a pontot a harmadik hatásvonalon lévő erő főpontjának nevezzük, az egyenletből ez a harmadik erő számítható. Második lépésként további nyomatéki egyenlettel meghatározunk egy újabb erőt. Ezt az egyenletet már nem az előbbi nyomatéki pontra írjuk fel, hanem a legutoljára számított erő hatásvonalának bármely pontjára. Ezzel a módszerrel elértük azt, hogy minden egyenlet egyismeretlenes legyen, így könnyebb a számítás is. Ha már két egyensúlyozó erőt meghatároztunk, akkora a harmadik erő összetevőit már a vetületi egyenletekből is kiszámíthatjuk. Ettől függetlenül azonban a harmadik erő is meghatározható nyomatéki egyenletből a második lépésben leírtak szerint.

A síkbeli erőrendszer három erővel való egyensúlyozását szerkesztéssel is meg lehet oldani. Ekkor az erőrendszert egyszerűsítjük három erőre. Az egyik az erőrendszer eredője – mivel egyetlen erővel helyettesíthető egy síkbeli erőrendszer és ez a helyettesítő erő az eredőerő – a másik erő az egyik egyensúlyozó erő, melynek hatásvonala adott, a szerkesztésben szereplő harmadik erő pedig a másik két meghatározandó erő eredője (egy pontja ismert, és mint eredő erőnek át kell mennie két összetevőjének metszéspontján). Ahhoz, hogy három erő egyensúlyban legyen, feltétele, hogy hatásvonalainak közös metszéspontja legyen. Ezt a metszéspontot az ismertetett erőhármassal adott hatásvonalú tagjaik egyértelműen kijelölik. Ezzel megkaptuk az eddig egy pontjával adott egyensúlyozó erők eredőjének hatásvonalának másik pontját is. Így a feladatot egy ismert erőnek két adott hatásvonalú erővel való egyensúlyozására vezettük vissza. Ennek megoldását már korábban ismertettük. Utolsó lépésként az egyensúlyozó erők eredőjét ismert irányú összetevőkre bontjuk. Ha a kötélpoligonos szerkesztést választjuk, akkor két egyensúlyozó erő eredőjének és a harmadik erő hatásvonalának ismeretében a feladat a két erővel való egyensúlyozás ott ismertetett fajtájával azonos.

SÍKBELI TARTÓK ÉS TÁMASZERŐK

4. Síkbeli tartók alakja és alátámasztása

A teherhordásra szolgáló szerkezeteket tartószerkezeteknek vagy röviden tartóknak nevezzük. A tartók azok a síkbeli és térbeli szerkezetek, amelyek terhek viselésére és azok továbbadására alkalmasak, a terhelések hatására nyugalomban maradnak. Ha a tartónak van szimmetriasíkja, és az összes erő ebben a szimmetriasíkban működik, akkor síkbeli tartóról beszélünk, egyébként térbeli tartóról van szó. A tartók jelentős része olyan test, amelynek keresztirányú kiterjedése hosszirányú méretéhez viszonyítva kicsi. Az ilyen tartókat rúdnak, legkisebb síkmetszetét keresztmetszetnek, a keresztmetszetek súlypontjait összekötő egyenest pedig rúdtengelynek nevezzük. A tartókat különböző szempontok szerint csoportosíthatjuk. Alakjukat tekintve beszélhetünk egyenes és törtvonalú, esetleg íves tartókról. Keresztmetszet kialakítása szerint megkülönböztetünk tömör és gerinclemezkes keresztmetszetű tartókat. A gerinclemez nélküli tartók több rúdból álló rácsos tartók. Anyaguk szerint lehetnek fa, beton, acél stb. alapanyagú tartók. Rendeltetésük szerint közlekedéscsillapítási vagy magasépítési tartókról beszélhetünk. A tartók támaszereinek számításakor az egyik legfontosabb jellemzőjük a tartók határozottsága. Ilyen szempontból a tartókat két csoportra osztjuk: határozott és határozatlan tartók. Határozott tartók azok a tartók, amelyeknek a támaszerőit az már ismertetett három egyensúlyi egyenletből meghatározhatóak. Ekkor az alátámasztások együttevve legfeljebb három ismeretlent képviselnek. Határozatlan tartók esetében azonban a három egyensúlyi egyenlet nem elegendő a támaszerők meghatározásához, további alakváltozási egyenletek szükségesek. A támaszok együttevve háromnál több ismeretlent képviselnek. Ha az ismeretlenek számát m -mel jelöljük, akkor a tartó határozatlanságának fokszáma $m-3$.

A tartók megtámasztására vagy helyzetük rögzítésére használt szerkezeti elemeket támaszoknak nevezzük, a tartó fesztávolsága alatt pedig két támasz között mért távolságot értjük. A fesztávolságot más néven támaszköznek is nevezzük. A tartók esetében az alábbi támaszokat alkalmazzuk:

- Mozgó saru a támaszpontnak a tartósík egy egyenesével párhuzamos elmozdulását akadályozza meg, ezáltal ismert az itt keletkezett támaszerő támadáspontja és hatásvonala. A támaszerő jellemzéséhez az erő nagyságának megadása elegendő. A támadáspont az egymáson csúszó felületek érintkezési pontja, a hatásvonala pedig merőleges az alátámasztás síkjára.
- Az álló saru vagy csukló olyan támaszok, amelyek a támaszpont eltolódását a tartósík két különböző irányú egyenesével párhuzamos irányban teszi lehetetlenné. Ekkor a támaszerő hatásvonalának egy pontja ismert, a támasz jellemzéséhez két adat szükséges.
- A befogás a tartó támasz körüli elfordulását és a tartósík két irányban történő eltolódását akadályozza meg. A befogás jellemzésére három adat szükséges.

A tartókra külső erők hatnak, melyek lehetnek koncentrált erők, illetve vonal mentén megoszló terhelések. Ezeket a külső erőket kell a tartóknak felvenni, és más épületszerkezeti elemekre átadni. A támaszokban keletkező erők nem mások, mint a tartóra ható külső síkbeli erőrendszer egyensúlyozó erői. A tartó egyensúlyának meghatározásakor csupán az egyensúlyi egyenleteket kell alkalmazni. A tartókra ható külső erők tanulmányozásakor több különleges esettel is találkozhatunk, melyek felismerése jelentősen megkönnyíti és leegyszerűsíti a támaszerők számítását. Ezek a következő esetek:

- Ha a tartóra egyetlen F koncentrált, tartóra merőleges erő hat, amely a tartó közepén található, akkor a támaszerők nagysága a koncentrált erő fele, irányuk a külső erő irányával ellentétes irányú.
- Ha a tartóra két egymással megegyező nagyságú F koncentrált tartóra merőleges erő hat, amelyek a tartót három részre osztják, akkor a támaszerők nagysága megegyezik az F erők nagyságával, irányuk pedig ellentétes a külső erők irányával.
- Ha a tartó egészére egyenletesen megoszló terhelés hat, akkor először az egyenletes terhelést helyettesítsük egyetlen koncentrált erővel, amely nem más, mint a megoszló terhelés és a tartó hosszának szorzata. Ezt a koncentrált erőt Q -val jelöljük. A feladatot ezzel az erőhelyettesítéssel visszavezettük az első esetre, mely szerint a támaszerők megegyeznek a Q erő nagyságának felével, irányuk pedig Q irányával ellentétes irányú.

A fent ismertetett szimmetrikus tartókon alkalmazott számítási módszer azonban nem általánosítható. Ha a szimmetria esete nem áll fenn, akkor a három egyensúlyi egyenlet felhasználásával lehet a tartók támaszerőit kiszámítani. A számítás megkezdésekor a ferde erőket összetevőkre kell felbontani. Első lépésként a nyomatéki egyensúlyi egyenletet írjuk fel. A könnyebb kezelhetőség érdekében nyomatéki pontnak válasszuk a fix alátámasztás és a tartó tengelyének metszéspontját. Mivel annak az erőnek nincsen nyomatéka, amelynek hatásvonala átmegy a ponton, így a nyomatéki egyenletben csak a másik támasznál keletkező támaszerő szerepel. A támaszerő irányát a síkbeli erőrendszer egyensúlyozása két erővel c. fejezetben leírtak szerint és annak megfelelően feltételezzük, és így számítjuk ki a támaszerő nagyságát. Ha azt eredmény pozitív előjelű, akkor a feltételezésünk helyes volt, ha negatív az előjel, akkor az irányt rosszul vettük fel. A további támaszerők meghatározásához a vetületi egyensúlyi egyenleteket használjuk fel.

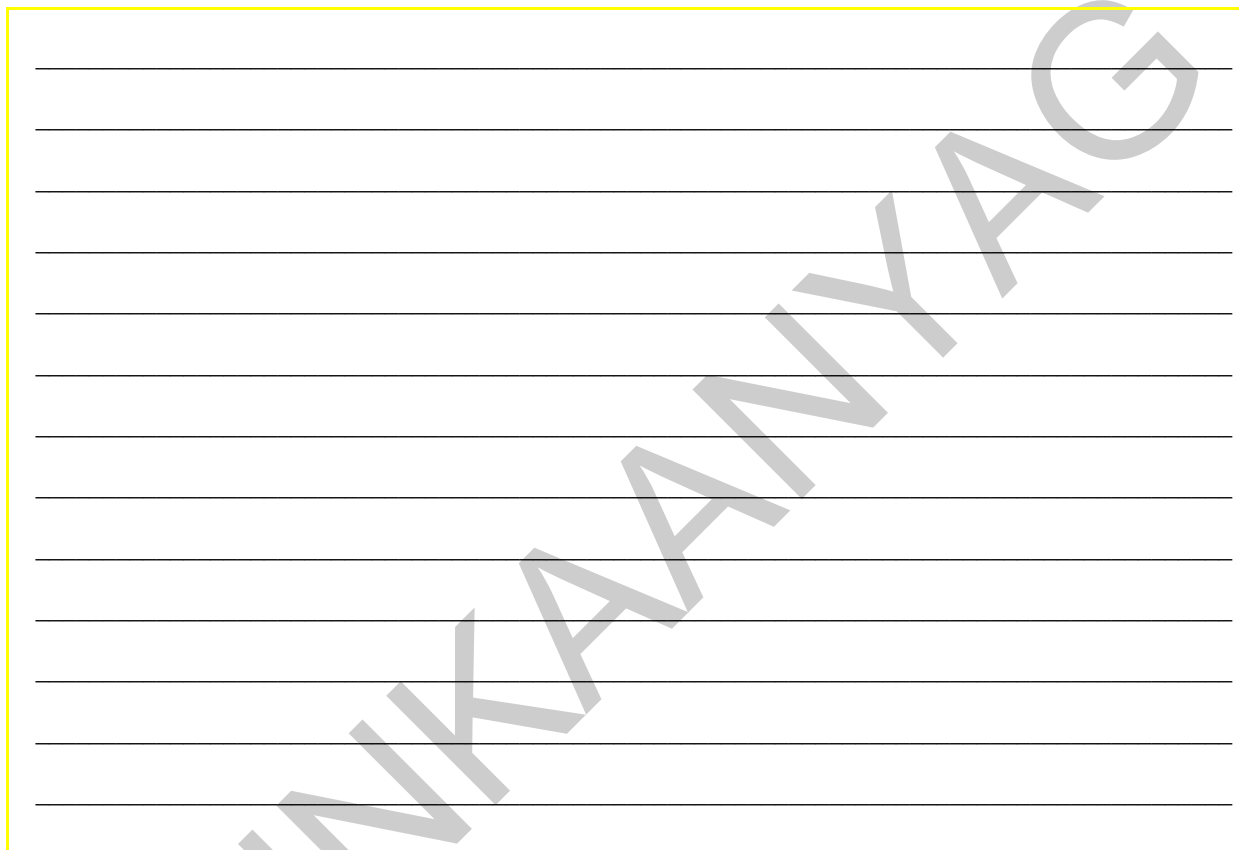
TANULÁSIRÁNYÍTÓ

1. Ismétlje át a síkbeli erőrendszer eredőerejéről tanultakat! Gyakorolja az eredőerő kiszámításának módszerét, valamint az eredőerő nagyságának és irányának szerkesztéssel való meghatározását különböző módszerekkel!
2. Tanulmányozza a síkbeli erőrendszer egyensúlyának feltételeit! Épületek tanulmányozásával keressen olyan szerkezeteket amelyekre erőrendszer hat és vizsgálja meg, mely szerkezetekben keletkező erők egyensúlyozzák azokat!
3. Keressen példákat síkbeli erőrendszer egyetlen erővel való egyensúlyozására a környezetéből!
4. Vizsgáljon megkülönböző épületszerkezeti elemeket, vázolja fel statikai modelljét a rá ható erőkkel. Határozza meg, milyen erőkkel lehetnek az adott szerkezetet a rá ható erőkkel együtt egyensúlyban tartani!
6. Tanulmányozza az egyensúlyi feltételeket, és azok összefüggéseit!
7. Oldja meg a számpéldákat!

ÖNELLENŐRZŐ FELADATOK

1. feladat

Ismertesse a síkbeli erőrendszer tulajdonságait és az összetevőit. Mit jelent a síkbeli erőrendszer egyensúlyozása?

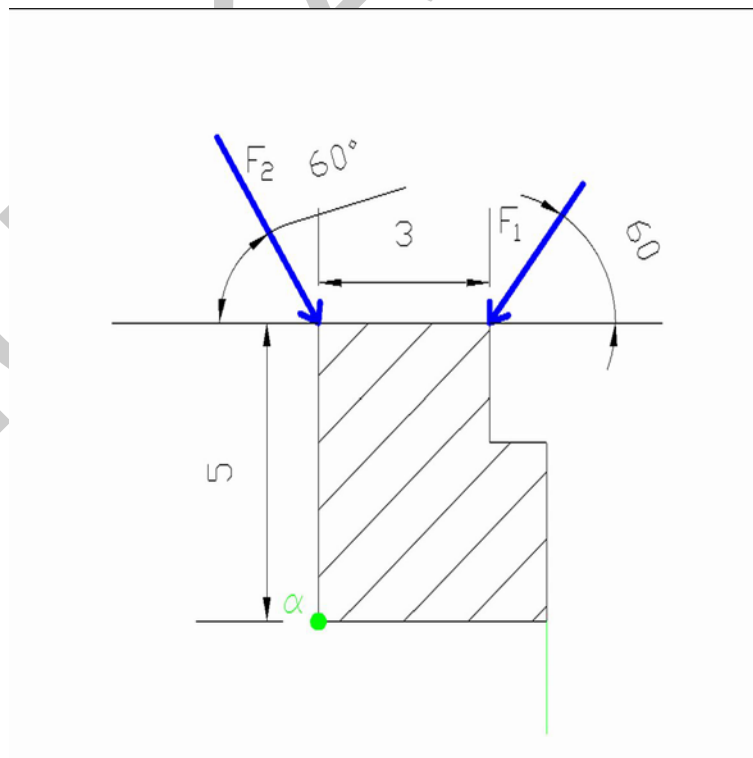


2. feladat

Ha egy síkbeli erőrendszert két erővel egyensúlyozunk, akkor milyen feltételekkel élhetünk és mit alkalmazunk a gyakorlatban a leggyakrabban?

3. feladat

Egyensúlyozza az alábbi síkbeli erőrendszert két erővel, ha $F_1 = 10 \text{ KN}$, $F_2 = 15 \text{ KN}$. A képen az egyik egyensúlyozó erő hatásvonalának egy adott pontját és a másik egyensúlyozó erő hatásvonalát zöld színnel jelöltük.

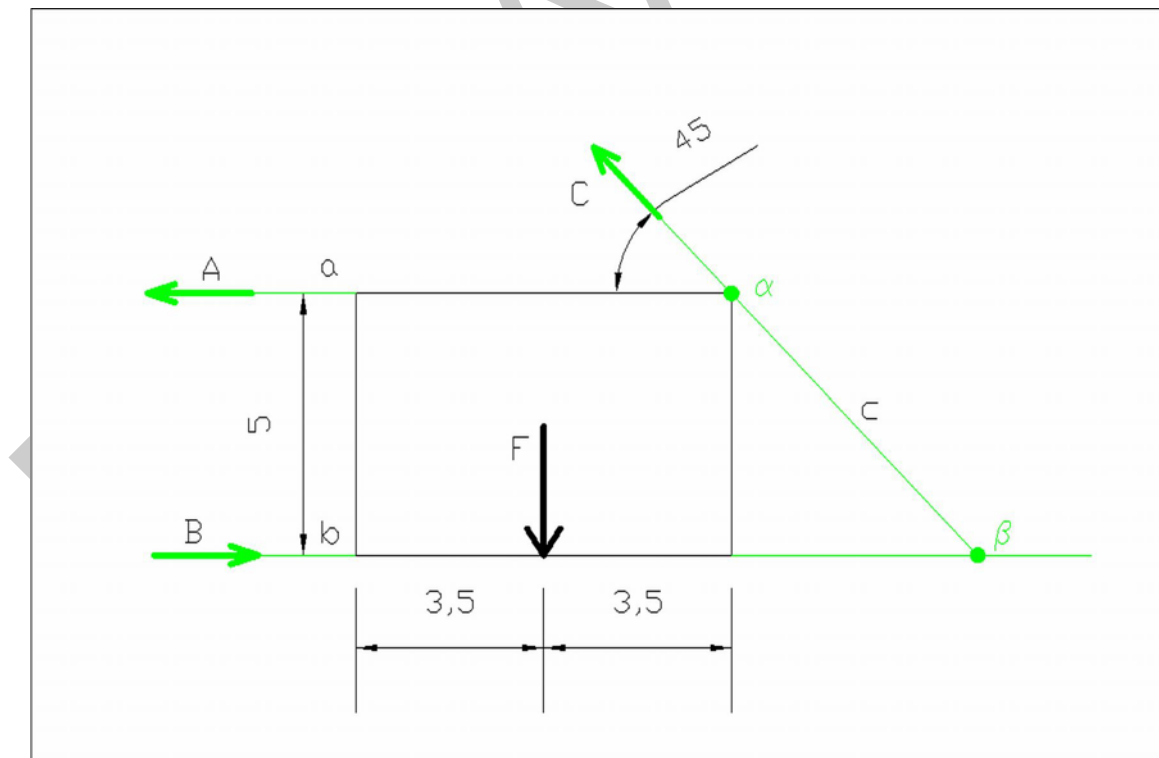


6. ábra. Gyakorlófeladat

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. A large, light gray watermark with the letters "VAG" is positioned diagonally in the lower right quadrant of the page. The entire sheet is framed by a thin yellow border.

4. feladat

Egyensúlyozza a síkbeli erőrendszert három erővel, ha $F=2 \text{ KN!}$ A képen az egyensúlyozó erők hatásvonalát és a feltételezett irányokat zöld színnel jelöltük.



7. ábra. Gyakorlófeladat

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and extend across the width of the page. A large, light gray watermark with the word "ANYAG" is oriented diagonally from the bottom left towards the top right, covering a significant portion of the lower half of the page. The watermark is composed of thick, sans-serif capital letters.

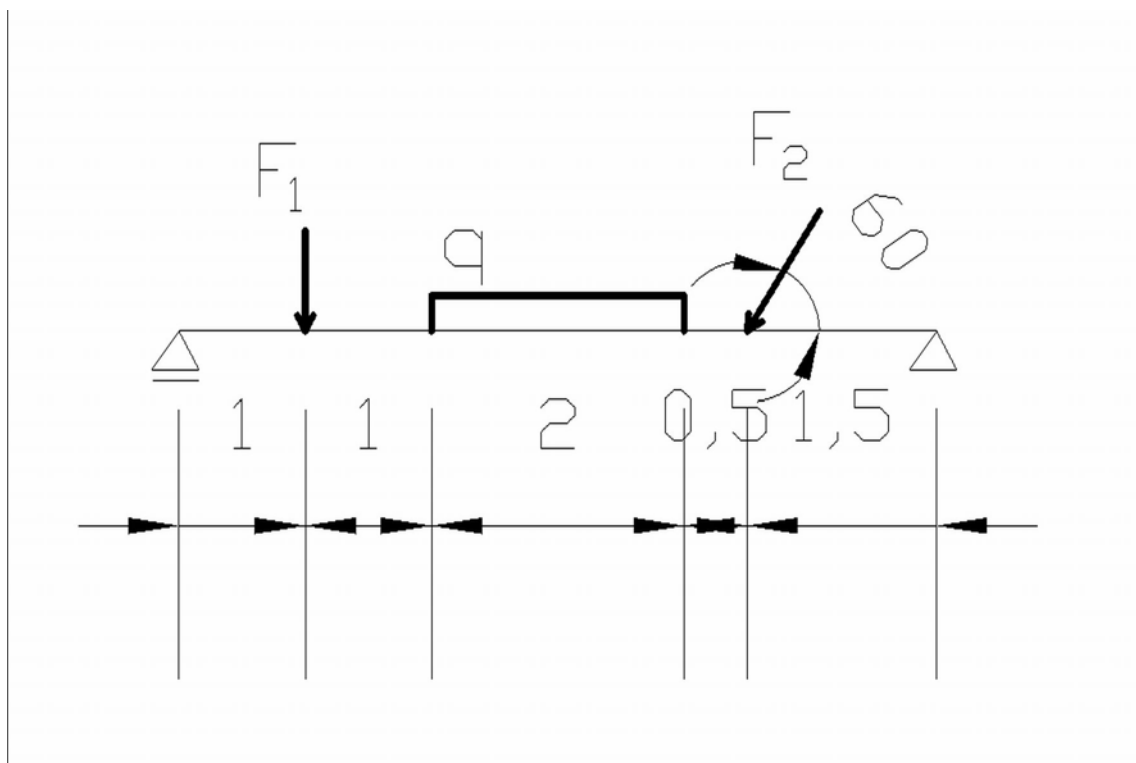
5. feladat

Ismertesse, hogy mit nevezünk tartónak! Mikor határozott és mikor határozatlan egy tartó?

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. A large, light gray watermark with the letters "MUN" is oriented diagonally from the top left towards the center. The paper has a yellow border on the right side. There are ten horizontal ruling lines visible across the page.

6. feladat

Határozza meg az alábbi tartó támaszerőit! $F_1=15 \text{ KN}$, $F_2=10 \text{ KN}$, $q=2 \text{ KN/m}$



8. ábra. Gyakorlófeladat

MUNKKANYAG

MEGOLDÁSOK

1. feladat

Két vagy több erő együttesét erőrendszernek nevezzük. Ha a testre ható erők közös síkban működnek, akkor síkbeli erőrendszerről beszélünk, ha viszont az erőrendszer erőinek hatásvonalaira nem lehet közös síkot fektetni, akkor térbeli erőrendszerrel állunk szemben. Sok esetben a könnyebb kezelhetőség miatt a térbeli erőrendszert egy síkbeli erőrendszerrel helyettesítjük, modellezzük. A síkbeli erőrendszert alkotják koncentrált erők, vonalmentén ható erők vagy ezek összessége.

Egy síkbeli erőrendszer egyensúlyáról akkor beszélünk, ha az erőrendszer bármely tengelyre képezett vetületösszege és bármely pontra felírt nyomatékösszege zérus. Adott általános erőrendszert – amely nincsen egyensúlyban – egyensúlyozni csak új egyensúlyozó erőhatásokkal tudunk. Egyensúlyozó erőhatások azok az erők és nyomatékok, amelyek az erőrendszerrel együtt az épületszerkezet nyugalmi állapotát létrehozzák.

2. feladat

Felírhatunk két nyomatéki és egy vetületi egyenletet, ha a vetületi tengely nem merőleges a két nyomatéki pontot összekötő egyenesre, vagy három nyomatéki egyenletet, ha a nyomatéki pontok nem esnek egy egyenesre.

A gyakorlatban a síkbeli erőrendszer két erővel történő egyensúlyozásakor a következő feltételek szerint járunk el: feltételezzük, hogy ismerjük az egyik egyensúlyozó erő hatásvonalán lévő A pontot, a másik egyensúlyozó erőnek pedig a hatásvonalát tételezzük fel ismertnek.

3. feladat

A számítás első lépéseként határozzuk meg a két külső erő összetevőit.

$$F_{1x} = 10 \text{ KN} \cdot \cos 60 = 5 \text{ KN}$$

$$F_{1y} = 10 \text{ KN} \cdot \sin 60 = 8.66 \text{ KN}$$

$$F_{2x} = 15 \text{ KN} \cdot \cos 60 = 7.5 \text{ KN}$$

$$F_{2y} = 15 \text{ KN} \cdot \sin 60 = 12.99 \text{ KN}$$

Írjuk fel a nyomatéki egyenletet az A pontra, melyből a B erőt meg tudjuk határozni:

$$M_A = +7.5 \text{ KN} \cdot 5 \text{ m} + 8.66 \text{ KN} \cdot 3 \text{ m} - 5 \text{ KN} \cdot 5 \text{ m} - B_y \cdot 4 \text{ m} = 37.5 \text{ KNm} + 25.98 \text{ KNm} - 25 \text{ KNm} - B_y \cdot 4 \text{ m}$$

$$B_y = 9.62 \text{ KN}$$

A továbbiakban a vetületi egyenletekből számítjuk ki a hiányzó egyensúlyozó erőket:

$$\Sigma F_y = 0 = 12.99 \text{ KN} + 8.66 \text{ KN} - 9.62 \text{ KN} - A_y$$

$$A_y = 12.03 \text{ KN}$$

$$\Sigma F_x = 0 = 7.5 \text{ KN} - 5 \text{ KN} - A_x$$

$$A_x = 2.5 \text{ KN}$$

4. feladat

A számítás első lépéseként írjuk fel a nyomatéki egyenletet az A erő főpontjára (a):

$$\Sigma M_A = A \cdot 5 \text{ m} - 2 \text{ KN} \cdot 3.5 \text{ m} = 0 \text{ Ebből } A \text{ erő } 1.4 \text{ KN}$$

Ezután írjuk fel a B erő főpontjára is a nyomatéki egyenletet:

$$\Sigma M_B = B \cdot 5 \text{ m} - 2 \text{ KN} \cdot 8.5 \text{ m} = 0 \text{ ebből a B erő } 3.4 \text{ KN}$$

A C erő komponenseit a vetületi egyenletekből határozzuk meg:

$$\Sigma F_x = C_x + 1.4 \text{ KN} - 3.4 \text{ KN} = 0, C_x = 2 \text{ KN}$$

$$\Sigma F_y = C_y - 2 \text{ KN} = 0, C_y = 2 \text{ KN}$$

$$C = 2.83 \text{ KN}$$

5. feladat

A teherhordásra szolgáló szerkezeteket tartószerkezeteknek vagy röviden tartóknak nevezzük. A tartók azok a síkbeli és térbeli szerkezetek, amelyek terhek viselésére és azok továbbadására alkalmasak. A terhelések hatására nyugalomban maradnak.

Határozott tartók azok a tartók amelyeknek a támaszerői az már ismertetett három egyensúlyi egyenletből meghatározhatóak. Ekkor az alátámasztások együttvéve legfeljebb három ismeretlent képviselnek. Határozatlan tartók esetében azonban a három egyensúlyi egyenlet nem elegendő a támaszerők meghatározásához, további alakváltozási egyenletek szükségesek. A támaszok együttvéve háromnál több ismeretlent képviselnek. Ha az ismeretlenek számát m -mel jelöljük, akkor a tartó határozatlanságának fokszáma $m-3$.

6. feladat

A számítás előkészítéseként bontsuk fel az F_2 erőt vetületeire, valamint az egyenletesen megoszló terhet alakítsuk át koncentrált teherré.

$$F_{2x} = 10 \text{ KN} \cdot \cos 60 = 5 \text{ KN}$$

$$F_{2y} = 10 \text{ KN} \cdot \sin 60 = 8.66 \text{ KN}$$

$Q = q \cdot l = 2 \text{ KN/m} \cdot 2 \text{ m} = 4 \text{ KN}$, a koncentrált erő a tartó közepén hat, a támaszoktól 3–3 m távolságra.

A támaszerők számításához vizsgáljuk meg az alátámasztások típusát. A rajzon látható, hogy a bal oldali támasz csak y irányú erők felvételére képes, a jobb oldali pedig mind x mind y irányú erőket vehet fel. Ezenkívül feltételezzük, hogy a támaszokban keletkező függőleges irányú erők felfele mutatnak.

A vízszintes erők egyensúlyozása ebben az esetben egyszerű, hiszen csak egyetlen erők kell egyensúlyozni, így a jobb oldali támaszerőben 5 KN egyensúlyozó erő ébred, amely jobbra mutat.

A függőleges irányú támaszerők számításához először írjuk fel a bal oldali támaszra a nyomatéki egyenletet:

$$\Sigma M_A = 0 = +15 \text{ KN} \cdot 1 \text{ m} + 4 \text{ KN} \cdot 3 \text{ m} + 8.66 \text{ KN} \cdot 4.5 \text{ m} - B_y \cdot 6 \text{ m} = 15 \text{ KNm} + 12 \text{ KNm} + 38.97 \text{ KNm} - B_y \cdot 6 \text{ m}$$

$$B_y = 11 \text{ KN}$$

Vetületi egyenletekből a bal oldali támaszban ébredő függőleges erő:

$$\Sigma F_y = 0 = 15 \text{ KN} + 4 \text{ KN} + 8.66 \text{ KN} - 11 \text{ KN} - A_y$$

$$A_y = 16.66 \text{ KN}$$

IRODALOMJEGYZÉK

FELHASZNÁLT IRODALOM

http://mechanika.ymmf.hu/Downloads/stat001_web_20070921.pdf (2010. 06. 09.)

http://mechanika.ymmf.hu/Downloads/meretezes01_20070919.pdf (2010. 06. 09.)

<http://www.freeweb.hu/gepeszmernoklap/statika.pdf> (2010. 06. 09.)

http://193.6.55.19/letolt/HEFOP/Meretezes_alapjai_%28STNB240%29.pdf (2010. 06. 09.)

http://www.mech.uni-miskolc.hu/~szirbik/notes/statika_levelezo_jegyzet.pdf (2010. 06. 09)

<http://www.dgf.hu/mechanika1-statika.pdf> (2010. 06. 09)

Dr. Matuscsák Tamás: Statika építésznek, Műegyetemi Kiadó, 1993

Dr. Rusznák György – Gimesy Mária: Statika példatár, Műegyetemi Kiadó, 1995

Bán Tivadarné: Statika, Tankönyvmester Kiadó, 2006

A(z) 0688–06 modul 004–es szakmai tankönyvi tartalomeleme
felhasználható az alábbi szakképesítésekhez:

A szakképesítés OKJ azonosító száma:	A szakképesítés megnevezése
54 582 04 0000 00 00	Mélyépítő technikus
54 215 01 0000 00 00	Műemlékfenntartó technikus
54 582 05 0000 00 00	Vízépítő technikus
54 582 03 0000 00 00	Magasépítő technikus

A szakmai tankönyvi tartalomelem feldolgozásához ajánlott óraszám:
29 óra

MUNKANYAG

A kiadvány az Új Magyarország Fejlesztési Terv
TÁMOP 2.2.1 08/1–2008–0002 „A képzés minőségének és tartalmának
fejlesztése” keretében készült.

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap
társfinanszírozásával valósul meg.

Kiadja a Nemzeti Szakképzési és Felnőttképzési Intézet
1085 Budapest, Baross u. 52.

Telefon: (1) 210–1065, Fax: (1) 210–1063

Felelős kiadó:
Nagy László főigazgató